## 7.2 Differenzierbare Gleichungssysteme

Ist $f : W \to \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar in einer offenen Umgebung $W \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ des Punktes $(\overline{x}, \overline{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{n+m}$ und ist $f(\overline{x}, \overline{y}) = 0$, so sind die Punkte $(x, y)$ der Faser $f^{-1}(0)$ gerade die Lösungen des differenzierbaren Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcl} f_1(x,y) & = & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ f_m(x,y) & = & 0 \end{array}$$

Falls dann die partielle Ableitung $D_2 f(\overline{x}, \overline{y}) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ invertierbar, d.h. $\det D_2 f(\overline{x}, \overline{y}) \neq 0$ ist, sind für diese Punkte wegen $0 = f(x,y) = D_1 f(\overline{x}, \overline{y})(x - \overline{x}) + D_2 f(\overline{x}, \overline{y})(y - \overline{y}) + \varepsilon(x,y)$ und $||\varepsilon(x,y)|| \ll ||(x - \overline{x}, y - \overline{y})||$ die Koordinaten

$$y \approx -D_2 f(\overline{x}, \overline{y})^{-1} \circ D_1 f(\overline{x}, \overline{y})(x - \overline{x}) + \overline{y}$$

in erster Näherung eine Funktion von x. Beachte: $\det D_2 f(\overline{x}, \overline{y}) = \det \left( \frac{\partial f_i}{\partial y_k}(\overline{x}, \overline{y}) \right)_{i,k=1,\dots,m}$. Außerdem ist die Sequenz von linearen Abbildungen

$$0 \longrightarrow \mathbb{R}^n \xrightarrow{(id_{\mathbb{R}^n}, -d_2^{-1} \circ d_1)} \mathbb{R}^{n+m} \xrightarrow{\quad d \quad} \mathbb{R}^m \longrightarrow 0$$

mit $d := Df(\overline{x}, \overline{y})$, $d_i := D_i f(\overline{x}, \overline{y})$ $(i = 1, 2)$ **exakt**, d.h.

$$(id_{\mathbb{R}^n}, -d_2^{-1} \circ d_1) \text{ ist injektiv, } d \text{ ist surjektiv, und } \operatorname{kern} d = \operatorname{bild} (id_{\mathbb{R}^n}, -d_2^{-1} \circ d_1).$$

Tatsächlich gilt dies auch in strengem Sinne:

**Theorem 7.2.0. (Satz über implizite Funktionen "SIF")**

*$\overline{x} \in U \subset \mathbb{R}^n$, $\overline{y} \in V \subset \mathbb{R}^m$ offen, $f : U \times V \to \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar, so dass*

(1) $f(\overline{x}, \overline{y}) = 0$

(2) $\det \left( \frac{\partial f_i}{\partial y_k}(\overline{x}, \overline{y}) \right) \neq 0.$

*Dann gibt es offene Umgebungen $\overline{x} \in U' \subset U$, $\overline{y} \in V' \subset V$ sowie eine 1-deutig bestimmte stetig differenzierbare Abbildung*

$$\tau : U' \to V', \ \tau(\overline{x}) = \overline{y}$$

*so dass*

$$f(x,y) = 0 \text{ für } (x,y) \in U' \times V' \iff y = \tau(x), \ x \in U'.$$

*<u>Zusatz</u> :*

$$D\tau(x) = -\big(D_2 f(x, \tau(x))\big)^{-1} \circ D_1 f(x, \tau(x))$$

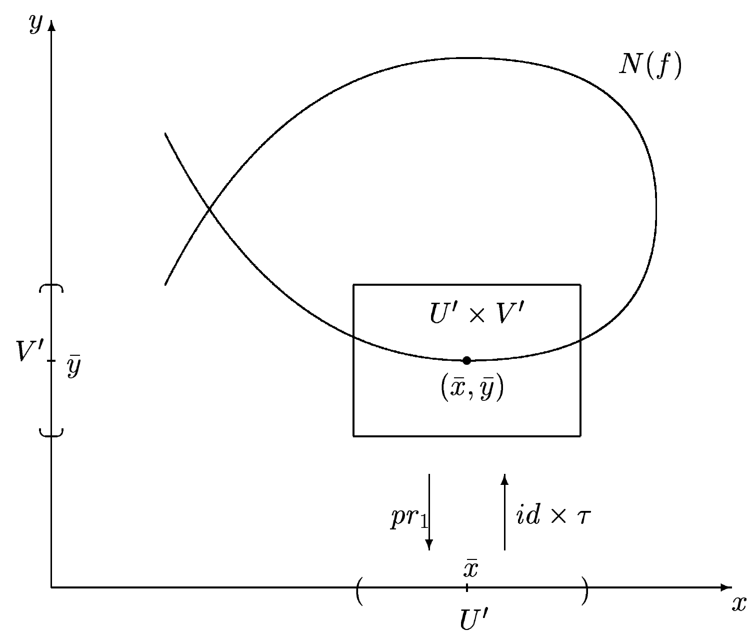
Geometrisch bedeutet dies, dass die Abbildung

$$id \;\times \tau : U' \to U' \times V'$$

lokal die Nullstellenmenge

$$N(f) := \{(x,y)|f(x,y) = 0\}$$

“parametisiert“:




$$\begin{tikzcd} U' \arrow[r, "id \times \tau"] \arrow[rr, bend right, "id_{U'}"'] & N(f) \cap U' \times V' \arrow[r, "pr_1"] & U' \end{tikzcd}$$

Ist $g : W \to \mathbb{R}^m$ eine stetig differenzierbare Abbildung einer offenen Umgebung von $\overline{y} \in W \subset \mathbb{R}^m$, so dass $\det Dg(\overline{y}) \neq 0$ ist, und wendet man SIF auf die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^m \times W \to \mathbb{R}^m,\; f(x,y) := -x + g(y),\; \overline{x} := g(\overline{y}),\; D_2 f(\overline{x}, \overline{y}) = Dg(\overline{y})$$

an, so gibt es offene Umgebungen $\overline{x} \in U \subset \mathbb{R}^m$, $\overline{y} \in V \subset W$, sowie eine stetig differenzierbare Abbildung

$$h : U \to V$$

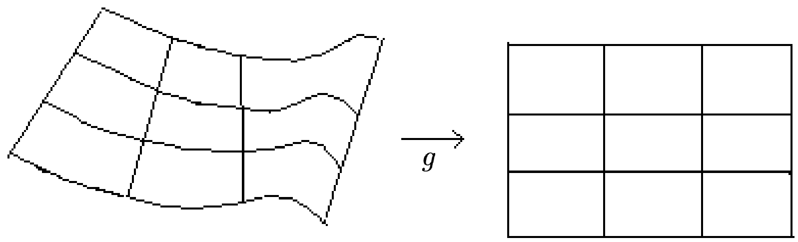
so dass $(x,y) \in \big(U \times V\big) \cap N(f) \iff y = h(x), x \in U$, d.h. $x = g \circ h(x)$ für alle $x \in U$. Wegen $id(\overline{x}) = Dg(\overline{y}) \circ Dh(\overline{x})$ ist $\det Dh(\overline{x}) \neq 0$. Daher gibt es - eventuell kleinere - offene Umgebungen $\overline{x} \in U' \subset U$, $\overline{y} \in V' \subset V$, sowie ein stetig differenzierbares $\tilde{g} : V' \to U'$ mit $h \circ \tilde{g} = id_{V'}$.
Aus $\tilde{g}(y) = (g \circ h)\big(\tilde{g}(y)\big) = g(y)$ folgt $g = \tilde{g}$ auf $V'$, also

**Theorem 7.2.1. (Satz über die lokale Umkehrfunktion "SUF")**

*$\overline{x} \in W \subset \mathbb{R}^m$ offen, $g : W \to \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar, so dass $\det Dg(\overline{x}) \neq 0$. Dann gibt es offene Umgebungen $\overline{x} \in U \subset \mathbb{R}^m$, $\overline{y} \in V \subset \mathbb{R}^m$, $\overline{y} = g(\overline{x})$, so dass*

(1) $g(V) = U$

(2) $g\big|_V$ *ist ein Diffeomorphismus, d.h.* $(g\big|_V)^{-1}$ *existiert und ist stetig differenzierbar.*




Diffeomorphismus $g$ = krummliniger Koordinatenwechsel

Wendet man umgekehrt SUF auf die Abbildung

$$F : U \times V \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \quad (x,y) \mapsto F(x,y) := (x, f(x,y))$$

an, so folgt SIF: Es ist nämlich $F(\overline{x},\overline{y}) = (\overline{x},0)$ und

$$Jf(\overline{x},\overline{y}) = \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ \star & \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_k}(\overline{x},\overline{y})\right)_{i,k=1,\dots,m} \end{pmatrix}$$

invertierbar.
Daher gibt es offene Umgebungen $(\overline{x},\overline{y}) \in U' \times V' \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, $(\overline{x},0) \in W \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ sowie eine stetig differenzierbare Abbildung $\varphi : W \to U' \times V'$, so dass

(1) $F \circ \varphi = id_W$

(2) $\varphi \circ F\big|_{U' \times V'} = id_{U' \times V'}$.

Die Abbildung $\tau : U' \to V'$, $x \mapsto pr_2\big(\varphi(x,0)\big)$ ist dann stetig differenzierbar. Wegen $(x,y) = F\big(\varphi(x,y)\big) = \big(pr_1\varphi(x,y), f(\varphi(x,y))\big)$ ist $x = pr_1\varphi(x,y)$ und $f\big(x, pr_2\varphi(x,0)\big) = 0$, d.h. $f(x,\tau(x)) = 0$, $x \in U'$.
Ist umgekehrt $(x,y) \in \big(U' \times V'\big) \cap f^{-1}(0)$, so ist $(x,y) = \varphi \circ F(x,y) = \varphi(x,0)$, d.h. $y = \tau(x)$, $x \in U'$. Auf $U' \times V'$ ist DF und damit $D_2 f$ invertierbar. Wegen $F \circ (id \times \tau) = 0$ ist nach der Kettenregel $D_1 f \circ (id \times \tau) + (D_2 f \circ (id \times \tau) \circ D\tau = 0$, woraus der Zusatz folgt.

*Beweis des SUF:* Œ $0 = \overline{y} = \overline{x}$, $Dg(0) = id$. Definiere $h : W \to \mathbb{R}^m$, $h(x) := x - g(x)$. Dann ist $0 = h(0) = Dh(0)$. Da h stetig differenzierbar, gibt es ein $0 < \varepsilon$ so dass

- $\overline{B_\varepsilon(0)} \subset W$
- $\|Dh(x)\| \leq \frac{1}{2}$ für alle $\|x\| \leq \varepsilon$.
- $\|h(x) - h(y)\| \leq \frac{1}{2}\|x - y\|$, $\|x\|, \|y\| \leq \varepsilon$,

insbesondere: $h : \overline{B_\varepsilon(0)} \longrightarrow \overline{B_{\frac{\varepsilon}{2}}(0)}$.
Für festes $y \in \overline{B_{\frac{\varepsilon}{2}}(0)}$ sei $h_y : \overline{B_\varepsilon(0)} \to \overline{B_\varepsilon(0)},\ x \mapsto y + h(x)$. $h_y$ ist kontrahierend mit Kontraktionsfaktor $\frac{1}{2}$. Daher existiert zu y genau ein $z \in \overline{B_\varepsilon(0)}$, so dass $h_y(z) = z$, d.h. $y = g(z)$. Definiere $U := g^{-1}(V) \cap B_\varepsilon(0)$, $V := B_{\frac{\varepsilon}{2}}(0)$. $U, V$ sind offene Umgebungen von 0, $g(U) \subset V$. Zu $y \in V$ gibt es ein $z \in \overline{B_\varepsilon(0)}$, so dass $y = g(z)$, also $y + z - g(z) = z$. Daher ist $\|z\| \leq \|y\| + \|h(z)\| < \varepsilon$, d.h. $g\big|_U\colon U \to V$ surjektiv. Ist $x, x' \in U$ und $g(x) = g(x')$, so ist $0 = \|g(x) - g(x')\| \geq \big|\|x - x'\| - \|h(x) - h(x')\|\big| \geq \frac{1}{2}\|x - x'\|$, d.h. $g\big|_U$ ist injektiv. Außerdem ist $\|Dg(x) - id\| = \|Dh(x)\| \leq \frac{1}{2}$ für $x \in U$ und damit auch $Dg(x)$ injektiv, da es sonst einen Vektor $0 \neq v$ gäbe mit $0 < ||v|| = ||Dg(x)(v) - v|| = ||Dh(x)(V)|| \leq \frac{1}{2}||v||$. Insbesondere ist $Dg(x) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ ein Isomorphismus für $x \in U$. Da $g\big|_U$ bijektiv ist, existiert die Umkehrfunktion $(g\big|_U)^{-1} : V \to U$. Ist $x = (g\big|_U)^{-1}(y)$, $x' = (g\big|_U)^{-1}(y')$, so ist $\|y - y'\| = \|(x - x') - (h(x) - h(x'))\| \geq \frac{1}{2}\|x - x'\|$. Daher ist $(g\big|_U)^{-1}$ stetig und $g\big|_U\colon U \to V$ ein Homomorphismus, so dass $D(g\big|_U)(x) = Dg(x)$ für alle $x \in U$ ein Isomorphismus ist. Deshalb ist $(g\big|_U)^{-1}$ differenzierbar und $D(g\big|_U)^{-1}(y) = \big(Dg(x)\big)^{-1}$.
$(g\big|_U)^{-1}$ ist stetig differenzierbar nach folgendem

**[HS]** $X, Y \subset \mathbb{R}^m$ offen, $\varphi : X \overset{\approx}{\to} Y$ Homöomorphismus, $x \mapsto D\varphi(x)$ stetig, $D\varphi(x)$ Isomorphismus für alle $x \in X$. Dann ist $\varphi^{-1}$ stetig differenzierbar.

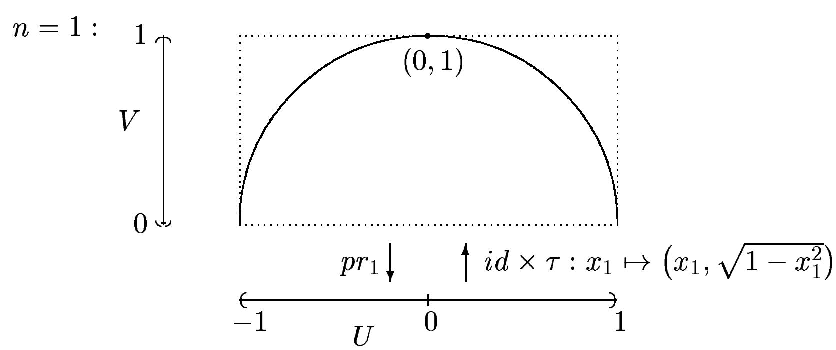
*Beweis des HS:* $D\varphi^{-1}(y)(\mathrm{v}) = J\varphi^{-1}(y) \cdot \mathrm{v}$.

$$\begin{aligned} \|D\varphi^{-1}(y) - D\varphi^{-1}(y')\|_\infty &= \sup_{\|\mathrm{v}\|_\infty = 1} \Big\|\big(D\varphi^{-1}(y) - (D\varphi^{-1}(y')\big)(\mathrm{v})\Big\|_\infty \\ &\leq m \cdot \bigg\|\Big(J\varphi\big(\varphi^{-1}(y)\big)\Big)^{-1} - \Big(J\varphi\big(\varphi^{-1}(y')\big)\Big)^{-1}\bigg\|_\infty \end{aligned}$$

Nach der Cramerschen Regel ist $y \mapsto \Big(J\varphi(\varphi^{-1}(y))\Big)^{-1} = J\varphi^{-1}(y)$ stetig, also $y \mapsto D\varphi^{-1}(y)$ stetig. □

**EX:**

[1] **Sphären**
$g : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R},\ g(x_1, \dots, x_{n+1}) := 1 - x_1^2 - \ldots - x_{n+1}^2$, $N(g) = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} | g(x) = 0\} = S^n$
$g(0, \dots, 1) = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial x_{n+1}}(0, \dots, 1) = -2 \neq 0,$
$U := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_1^2 + \ldots + x_n^2 < 1\} \ni 0,$
$\tau : U \to \mathbb{R}_+, \quad \tau(x_1, \dots, x_n) = \sqrt{1 - x_1^2 - \ldots - x_n^2}.$



[2] **Polar-Koordinaten**
$g : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \setminus 0$
$g(r,t) := (r\cos t,\ r\sin t)$
$Jg(r,t) = \begin{pmatrix} \cos t & -r\sin t \\ \sin t & r\cos t \end{pmatrix}$, also $\det Jg(r,t) = r \neq 0$. $g$ ist daher ein lokaler Diffeomorphismus. Wegen $g(r,t) = g(r, t+2\pi)$ ist aber $g$ nicht global umkehrbar. Ist der Strahl $S_\alpha := \overline{\mathbb{R}_+} \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$ gegeben, so bildet $g$ den Streifen $\mathbb{R}_+ \times (\alpha, \alpha + 2\pi) \subset \mathbb{R}^2$ diffeomorph auf die längs $S_\alpha$ geschlitzte Ebene $\mathbb{R}^2 \setminus S_\alpha$ ab.

[3] $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x,y,z) \mapsto (x + e^y,\ y + e^z,\ z + e^x)$

Ⓢ $g$ ist ein Diffeomorphismus.

*Beweis :* $\det Jg(x,y,z) = 1 + \exp(x+y+z)$. Deshalb ist zunächst $g$ ein lokaler Diffeomorphismus und daher $g(X)$ offen für alle $X \subset \mathbb{R}^3$ offen.
Ist $(x,y,z) \neq (x',y',z')$, aber $g(x,y,z) = g(x',y',z')$, so ist Œ $x > x'$ und

$$\begin{aligned} x - x' &= \exp y' - \exp y > 0 \\ y - y' &= \exp z' - \exp z < 0 \\ z - z' &= \exp x' - \exp x > 0, \end{aligned}$$

ein Widerspruch, d.h. $g$ ist injektiv. Sei $(a,b,c) \in \overline{g(\mathbb{R}^3)}$. Dann gibt es eine Folge $(x_n, y_n, z_n)$, so dass $g(x_n,y_n,z_n) \to (a,b,c)$, d.h.

$$\begin{aligned} x_n + \exp y_n &\to a \\ y_n + \exp z_n &\to b \\ z_n + \exp x_n &\to c. \end{aligned}$$

Da $\exp > 0$, sind zunächst $x_n, y_n, z_n$ nach oben beschränkt. Da $x_n + \exp y_n$ beschränkt ist, ist $x_n$ und analog $y_n, z_n$ auch nach unten beschränkt, d.h. Œ $(x_n,y_n,z_n) \to (\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$, insbesondere $(a,b,c) = g(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) \in g(\mathbb{R}^3)$. Daher ist das bild $g$ offen und abgeschlossen, also bild $g = \mathbb{R}^3$, da $\mathbb{R}^3$ zusammenhängend, d.h. g bijektiv. Ist $Y \subset \mathbb{R}^3$ offen, so ist $(g^{-1})^{-1}(Y) = g(Y)$ offen, d.h. $g^{-1}$ ist stetig und damit ein Homöomorphismus. Da $g$ außerdem überall ein lokaler Diffeomorphismus ist, ist $g$ ein globaler Diffeomorphismus.
□

**Lemma 7.2.2.** *:*
*$\bar{u} \in X \subset \mathbb{R}^{n+m}$ offen, $f : X \to \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar und $f(\bar{u}) = 0$, $rgDf(\bar{u}) = m$, d.h. $Df(\bar{u}) : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$ surjektiv.*
*Dann gibt es offene Umgebungen $\bar{u} \in W \subset X$, $0 \in W' \subset \mathbb{R}^{n+m}$ sowie einen Diffeomorphismus $\varphi : W \to W'$, so dass*

(1) $\varphi(\bar{u}) = 0$

(2) $\varphi\big(W \cap N(f)\big) = W' \cap (\mathbb{R}^n \times 0)$.

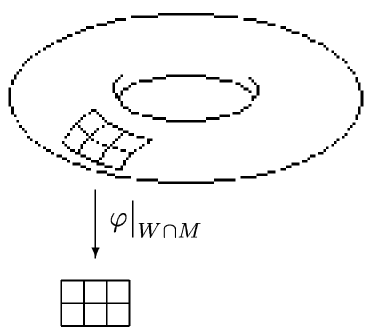
*Beweis :* Œ $rg\ D_2 f(\bar{u}) = m$, d.h. $\bar{u} = (\bar{x}, \bar{y}) \in X \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, $\det\left(\frac{\partial f_i}{\partial y_k}(\bar{u})\right) \neq 0$. Definiere

$$\varphi : X \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \quad (x,y) \mapsto \big(x, f(x,y)\big) - (pr_1\bar{u}, 0).$$

Dann ist $\varphi(\bar{u}) = 0$ und $J\varphi(\bar{u}) = \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ \star & \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_k}(\bar{u})\right) \end{pmatrix}$, also $\det D\varphi(\bar{u}) \neq 0$. Nach SUF existieren offene Umgebungen $\bar{u} \in W \subset X$, $0 \in W' \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, so dass $\varphi\big|_W : W \to W'$ diffeomorph.
Aus $(x,y) \in W \cap N(f)$ folgt $\varphi(x,y) \in W'$ und $\varphi(x,y) = (x - pr_1\bar{u}, 0) \in \mathbb{R}^n \times 0$, also $\varphi\big(W \cap N(f)\big) \subset W' \cap (\mathbb{R}^n \times 0)$.
Ist umgekehrt $w' = (x', y') \in W' \cap (\mathbb{R}^n \times 0)$, so gilt $y' = 0$, und es gibt ein $(x,y) \in W$ mit $\varphi(x,y) = w'$. Daraus folgt $f(x,y) = y' = 0$, also $(x,y) \in W \cap N(f)$ und somit insgesamt $W' \cap (\mathbb{R}^n \times 0) \subset \varphi\big(W \cap N(f)\big)$. □

**Definition 7.2.3.**
*$M \subset \mathbb{R}^{n+m}$ n-dimensionale* **differenzierbare Untermanigfaltigkeit** *des $\mathbb{R}^{n+m}$ :$\Longleftrightarrow$ Zu jedem $\bar{u} \in M$ gibt es offene Umgebungen $\bar{u} \in W \subset \mathbb{R}^{n+m}$, $0 \in W' \in \mathbb{R}^{n+m}$ sowie einen Diffeomorphismus $\varphi : W \to W'$, so dass $\varphi(\bar{u}) = 0$, $\varphi(W \cap M) = W'(\cap \mathbb{R}^n \times 0)$.*

Das Tupel $(\varphi\big|_{W\cap M}, W \cap M)$ ist eine sogenannte **Karte von M**. Die Dimension einer differenzierbaren Untermanigfaltigkeit ist 1-deutig bestimmt.




**EX:** Die n-Sphäre $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ist eine n-dimensionale Untermanigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n+1}$ mit Karten $x \mapsto (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{n+1}, \sqrt{1 - x_1^2 - \ldots - x_{i-1}^2 - x_{i+1}^2 - \ldots - x_{n+1}^2})$ nahe $\bar{x}^i := (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$.

**Lemma 7.2.4.** *:*

*äq*

(i) *$M \subset \mathbb{R}^{n+m}$ n-dimensionale differenzierbare Untermanigfaltigkeit.*

(ii) *Zu jedem Punkt $\bar{u} \in M$ gibt es eine offene Umgebung $\bar{u} \in X \subset \mathbb{R}^{n+m}$ sowie eine stetig differenzierbare Abbildung $f : X \to \mathbb{R}^m$ so dass*

(1) *$M \cap X = N(f)$*

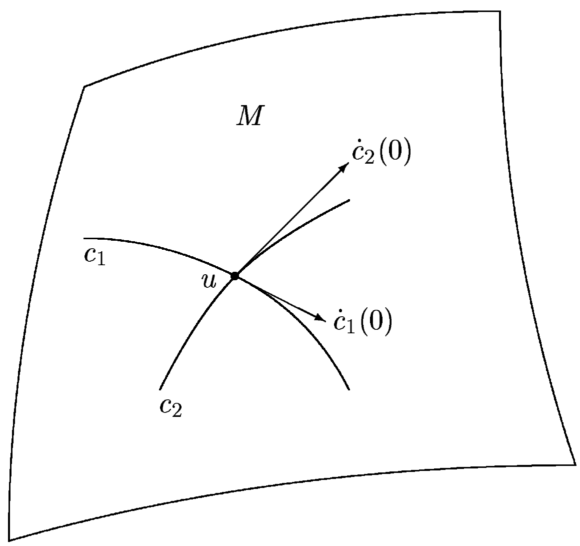
(2) *$rg\ Df(\bar{u}) = m$.*

*Beweis :*
(ii) $\Rightarrow$ (i): ✓
(i) $\Rightarrow$ (ii): $f := pr_2 \circ \varphi$. □

Sei $U \subset R^{n+m}$ n-dimensionale differenzierbare Untermanigfaltigkeit, $\bar{u} \in M$, $\varphi\big|_{W \cap M}$ eine Karte nahe $\bar{u}$, $\varphi(\bar{u}) = 0$. Dann ist

$$T_{\bar{u}}M := \left\{\dot{c}(0) \mid c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M \text{ stetig differenzierbare Kurve mit } c(0) = \bar{u}\right\} \subset \mathbb{R}^{n+m}$$

der sogenannte **Tangentialraum von M in $\bar{\mathbf{u}}$**.




**EX:** $T_xS^n = \{\mathrm{v} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \mathrm{v} \perp x\} = \{\mathrm{v} \in \mathbb{R}^{n+1} | (\mathrm{v}|x) = 0\}$.

**Lemma 7.2.5.** *:*
$T_{\bar{u}}M = \big(D\varphi(\bar{u})\big)^{-1}(\mathbb{R}^n \times 0)$. *Insbesondere ist $T_{\bar{u}}M$ ein Vektorraum der Dimension n.*

*Beweis :* $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M \cap W$, $c(0) = \bar{u}$. Die Kurve $\varphi \circ c$ verläuft dann in $\mathbb{R}^n \times 0$, also $(\varphi \circ c)^{\cdot}(0) = D\varphi(\bar{u})\big(\dot{c}(0)\big) \in \mathbb{R}^n \times 0$, $T_{\bar{u}}M \subset \big(D\varphi(\bar{u})\big)^{-1}(\mathbb{R}^n \times 0)$.
Umgekehrt verläuft für $\mathrm{v} \in \mathbb{R}^n \times 0$ die Kurve $c : t \mapsto \varphi(t, \mathrm{v})$, $|t| \ll 1$, in $M \cap W$ und $\dot{c}(0) = \big(D\varphi(\bar{u})\big)^{-1}(\mathrm{v})$, d.h. $D\varphi(\bar{u})^{-1}(\mathbb{R}^n \times 0) \subset T_{\bar{u}}M$. □

**Definition 7.2.6.** *:*
*Sei $\bar{u} \in M \subset \mathbb{R}^{n+m}$ n-dimensionale differenzierbare Untermannigfaltigkeit, $\bar{u} \in X \subset \mathbb{R}^{n+m}$ offen, $g : X \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar.*
*$\bar{u}$ heißt* **kritischer Punkt von g unter der Nebenbedingung M***: $\iff$ 0 ist kritischer Punkt von $t \mapsto g \circ c(t)$ für alle stetig differenzierbaren Funktionen $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M \cap X$ mit $c(0) = \bar{u}$ .*

**Satz 7.2.7.** *:*

*äq*

(i) *$\bar{u}$ kritischer Punkt von $g$ unter der Nebenbedingung $M$*

(ii) $Dg(\bar{u})\big|_{T_{\bar{u}}M} = 0.$

(iii) *$D_{\mathrm{v}}g(\bar{u}) = 0$ für alle* $\mathrm{v} \in T_{\bar{u}}M$

$\bar{u} \in X \subset \mathbb{R}^{n+m}$ offen, $g : X \to \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar, so dass $rg\ Df(\bar{u}) = m$. Dann gibt es $\bar{u} \in W \subset X$ offen, so dass

$$N(f) \cap W$$

differenzierbare Untermanigfaltigkeit der Dimension n.

**Lemma 7.2.8.** *: $T_{\bar{u}}(N(f) \cap W) = \ kern\ Df(\bar{u})$.*

*Beweis :* $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to N(f) \cap W$, $c(0) = \bar{u}$ impliziert $f \circ c = 0$, woraus $\dot{c}(0) \in \ kern\ Df(\bar{u})$ folgt, d.h. $T_{\bar{u}}(N(f) \cap W) \subset \ kern\ Df(\bar{u})$. Wegen $n = dim\ T_{\bar{u}}(N(f) \cap W) = dim\ Kern\ Df(\bar{u})$ folgt die Behauptung. □

**Theorem 7.2.9. (Lagrange'sche[1] Multiplikatoren)**

*äq*

(i) *$\bar{u}$ kritischer Punkt mit der Nebenbedingung $N(f) \cap W$.*

(ii) *Es gibt ein $\lambda \in \mathbb{R}^m$, so dass $D\big(g + (\lambda|f)\big)(\bar{u}) = 0$, d.h. $\bar{u}$ ist ein kritischer Punkt der Funktion $g + (\lambda|f) : X \to \mathbb{R}$.*

**[HS]** Sind $L_1, \dots, L_m$ linear unabhängige Linearformen auf dem endlich dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum V, so ist

$$span\{L_1, \dots, L_m\} = \sum \mathbb{R} \cdot L_i = \left( \bigcap_{i=1}^{m} kern\ L_i \right)^{\perp}.$$

*Beweis des HS:* Es ist $dim\ (\bigcap\ kern\ L_i)^{\perp} = m$, $(kern\ L_i)^{\perp} = \mathbb{R} \cdot L_i, (i = 1, \dots, m)$ und $\sum (kern\ L_i)^{\perp} \subset (\bigcap\ kern\ L_i)^{\perp}$. Aus Dimensionsgründen stimmen beide Unterräume überein. □

*Beweis des Theorems:* Wegen $rg\ Df(\bar{u}) = m$ sind die Linearformen $Df_i(\bar{u})$ linear unabhängig. Außerdem ist $T_{\bar{u}}\big(N(f) \cap W\big) = kern\ Df(\bar{u}) = \bigcap_{i=1}^{m} kern\ Df_i(\bar{u})$. $\bar{u}$ ist g-kritisch unter der Nebenbedingung $N(f) \cap W$ genau dann, wenn $Dg(\bar{u}) \in (kern\ Df(\bar{u}))^{\perp} = \sum \mathbb{R} \cdot Df_i(\bar{u})$. □

[1] Joseph Louis Lagrange (1736 - 1813), französischer Mathematiker

**EX: Hölder'sche[2] Ungleichung**

$p \in \mathbb{R}_+,\ x \in \mathbb{R}^n,\ ||x||_p := (\sum |x|^p)^{\frac{1}{p}}$.

Ⓢ $p, q \in \mathbb{R}_+$, so dass $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $x, y \in \mathbb{R}^n$. Dann ist $|(x|y)| \le ||x||_p \cdot ||y||_q$.

*Beweis :* Œ $x, y \in \mathbb{R}^n_+$, $p > 1$. Definiere für $\alpha \in \mathbb{R}^n_+$

$$\begin{aligned} &g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto (\alpha|x), \\ &f : \mathbb{R}^n_+ \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto 1 - \sum x_k^p, \\ &M := \{x \in \mathbb{R}^n_+ \mid f(x) = 0\}. \end{aligned}$$

$grad\ f(x) = -p \cdot (x_1^{p-1}, \ldots, x_n^{p-1}) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n_+$. Daher ist M eine differenzierbare Untermanigfaltigkeit der Dimension $(n-1)$ des $\mathbb{R}^n$.
Ist $x \in M$, so ist $x_k \le 1$ $(k = 1, \ldots, n)$, insbesondere ist $\overline{M}$ kompakt und $g\big|_{\overline{M}}$ nimmt sein Maximum in einem Punkt $u \in \overline{M}$ an. Da $\alpha \in \mathbb{R}^n_+$, ist $u \in M$. Insbesondere ist u kritischer Punkt von $g\big|_M$. Beachte: $0 \notin \overline{M}$. Nach Lagrange gibt es daher ein $\lambda \in \mathbb{R}$, so dass $D(g + \lambda f)(u) = 0$, d.h.

$$\alpha_k - \lambda \cdot p \cdot u_k^{p-1} = 0 \text{ für } k = 1, \ldots, n.$$

Mit $1 = \sum u_k^p$ folgt hieraus

$$(\lambda p)^{\frac{p}{p-1}} = \sum_{k=1}^n \alpha_k^{\frac{p}{p-1}}$$

und schließlich

$$u_i = \frac{\alpha_i^{\frac{1}{p-1}}}{\left(\sum \alpha_k^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{1}{p}}} \text{ für } i = 1, \ldots, n.$$

Für $x \in \overline{M}$ ist daher $g(x) \le g(u) = (\sum \alpha_k^{\frac{p}{p-1}})^{\frac{p-1}{p}}$.
Für $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, $x_k := \dfrac{\beta_k}{(\sum \beta_k^p)^{\frac{1}{p}}} \ge 0$ folgt

$$|(\alpha|\beta)| = (\alpha|\beta) \le ||\alpha||_q \cdot ||\beta||_p.$$

Gleichheit tritt genau für $\beta_k^p = const \cdot \alpha_k^q$ ein. $\square$

[2] O. Hölder (1859 - 1937), deutscher Mathematiker