Kapitel 8

Gewöhnliche Differentialgleichungen

8.0 Lineare Differentialgleichungen

Ist A ein stetiger Endomorphismus eines Banachraumes $(E, \| \ \|)$, so konvergiert die Exponentialreihe

$$\exp(tA) = \sum_{k \geq 0} \frac{t^k A^k}{k!}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ in dem Banachraum $L(E, E)$ aller stetigen Endomorphismen von E, versehen mit der Norm

$$\|A\| := \sup_{\|\mathrm{v}\|=1} \|A\mathrm{v}\|.$$

Falls A und B kommutieren, ist

$$\exp t(A+B) = \exp tA \cdot \exp tB$$

und

$$\exp\bigl(tBAB^{-1}\bigr) = B \cdot \exp tA \cdot B^{-1}, \text{ falls } B^{-1}\text{existiert.}$$

(Nach dem Open Mapping Theorem ist B^{-1} stetig!)

Satz 8.0.0. *:*

Die Abbildung $e : \mathbb{R} \to L(E, E)$, $t \mapsto e_A(t) := \exp tA$ *ist stetig differenzierbar, und es gilt* $De_A(t) = A \exp tA$.

Beweis : Für $t \in \mathbb{R}$, $|h| \ll 1$ ist

$$\begin{aligned} e_A(t+h) &= e_A(t) + (e_A(h) - 1_E) \cdot e_A(t) \\ &= e_A(t) + hA \cdot e_A(t) + h^2 \sum_{k \leq 2} \frac{h^{k-2} A^k}{k!} \cdot e_A(t) \end{aligned}$$

Die Abbildung $h \mapsto h \cdot A \cdot e_A(t)$ ist linear und stetig, das Restglied wächst höchstens wie $|h|^2 \cdot \exp \|A\| \cdot \|e_A(t)\|$, d.h. e_A ist differenzierbar, $De_A(t) = A \cdot \exp tA$. Da $t \mapsto A \cdot \exp tA$ stetig ist, ist e sogar stetig differenzierbar. □

Folgerung 8.0.1. *:*
Für $\bar{x} \in E, \bar{\tau} \in \mathbb{R}$ ist $\varphi : \mathbb{R} \to E,\ t \mapsto \varphi(t) := e_A(t-\tau) \cdot \bar{x}$ die einzige stetig differenzierbare Kurve mit

(1) $\dot{\varphi}(t) = A \cdot \varphi(t)$

(2) $\varphi(\bar{\tau}) = \bar{x}$.

Man sagt daher auch, dass φ die „Integralkurve“ der linearen DGL

$$\dot{x} = A \cdot x$$

zum Anfangswert $(\bar{\tau}, \bar{x})$ ist.

Beweis : Ist ψ eine zweite Integralkurve, so verschwindet die Ableitung der Kurve

$$t \mapsto c(t) := \exp\big(-(t-\bar{\tau})\big) \cdot \psi(t).$$

Ist $b : I \to E$ stetig auf einem offenen Intervall I um $\bar{\tau}$, so liefert eine „Variation der Konstanten“ die Integralkurve der inhomogenen linearen DGL

$$\dot{x} = A \cdot x + b(t)$$

$t \mapsto c(t) := e_A(t-\bar{\tau}) \cdot x(t)$ ist nämlich eine Integralkurve zum Anfangswert $(\bar{\tau}, \bar{x})$ genau dann, wenn

$$\dot{e}_A(t-\bar{\tau}) \cdot x(t) + e_A(t-\bar{\tau}) \cdot \dot{x}(t) = A \cdot e_A(t-\bar{\tau}) \cdot x(t) + b(t),$$

d.h.

$$\dot{x}(t) = e_A\big(-(t-\bar{\tau})\big) \cdot b(t),\ x(\bar{\tau}) = \bar{x},$$

also

$$x(t) = \bar{x} + \int_{\bar{\tau}}^{t} \exp\big(-(s-\bar{\tau})A\big) \cdot b(s)ds.$$

□

Folgerung 8.0.2. (Variation der Konstanten)
$t \mapsto e_A(t-\bar{\tau}) \left(\bar{x} + \int_{\bar{\tau}}^{t} \exp(-(s-\bar{\tau})A) \cdot b(s)ds\right)$ *ist die Integralkurve der inhomogenen DGL* $\dot{x} = A \cdot x + b(t)$ *zum Anfangswert* $(\bar{\tau}, \bar{x})$.

Ist $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ und $\varphi : I \to \mathbb{R}$ n-mal stetig differenzierbar mit

$$\varphi^{(n)} + a_1\varphi^{(n-1)} + \ldots + a_n\varphi = 0,$$

so ist φ eine Integralkurve einer sogenannten DGL n-ter Ordnung.

Die Kurve $t \mapsto c(t) := \big(\varphi(t), \varphi^{(1)}(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t)\big)$ im $\mathbb{R}^n$ ist dann eine Integralkurve der gewöhnlichen linearen DGL

$$\dot{x} = A \cdot x,\ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \ldots & \ldots & -a_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times m}.$$

Umgekehrt gelten für die Koordinatenfunktionen x_i einer Integralkurve x von $\dot{x} = A \cdot x$ die Beziehungen $\dot{x}_k = x_{k+1}$ $(k = 1, \dots, n-1)$, d.h.

$$x_1^{(n)} + a_1 x_1^{(n-1)} + \ldots + a_n x_1 = 0.$$