8.1 Vektorfelder

Ist $\emptyset \neq X \subset E$ eine offene Menge in einem Banachraum $(E, \| \ \|)$, so heißt eine stetige Abbildung $v : X \to E$ auch ein **Vektorfeld**.

Definition 8.1.0. *:*
v Lipschitz[1]-stetiges Vektorfeld auf X :$\iff$ Es gibt eine Konstante $L \geq 0$, so dass

$$\|v(x) - v(y)\| \leq L \cdot \|x - y\| \text{ für alle } x, y \in X.$$

Wendet man den MWS auf konvexe Umgebungen U von Punkten von X an, so erhält man

Lemma 8.1.1. *:*
Jedes stetig differenzierbare Vektorfeld $v : X \to E$ ist lokal L-stetig.

$\alpha : I \to X$ differenzierbare Kurve auf einem nicht ausgearteten offenen Intervall $I \subset \mathbb{R}$.

Definition 8.1.2. *:*
α Integralkurve von $v : X \to E$:$\iff$ $\dot{\alpha}(t) = v\big(\alpha(t)\big)$ für alle $t \in I$.

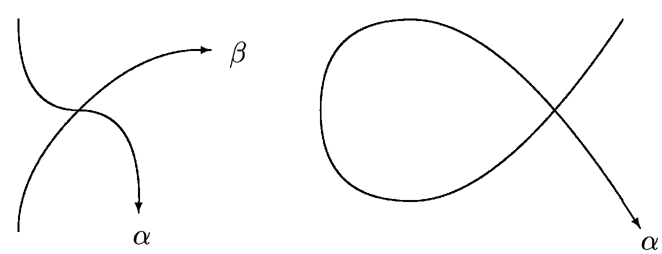
Man sagt dann auch, dass α eine Lösung der DGL $\dot{x} = v(x)$ ist. α ist dann insbesondere stetig differenzierbar.

Satz 8.1.3. *:*
Ist $v : X \to E$ L-stetig, sind α, β Integralkurven von v auf offenen Intervallen I,J und ist $\emptyset \neq [a, b] \subset I \cap J$, so ist

$$\sup_{t \in [a,b]} \|\alpha(t) - \beta(t)\| \leq \|\alpha(a) - \beta(a)\| e^{L(b-a)}.$$

Folgerung 8.1.4. *:*
Ist $\alpha(\tau) = \beta(\tau)$ für wenigstens ein $\tau \in I \cap J$, so gilt auf dem gesamten offenen Intervall $I \cap J$

$$\alpha\big|_{I \cap J} = \beta\big|_{I \cap J}.$$



unmöglich bei L-stetigen Vektorfeldern

[1] Rudolph Otto Sigismund Lipschitz (1832 - 1903), deutscher Mathematiker

Bemerkung 8.1.5. *:*
Stetige, aber nicht L-stetige Vektorfelder können mehrere Integralkurven haben, die nur in einem Punkt, nicht aber in einem offenen Intervall übereinstimmen: $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $v(x) := 3|x|^{2/3}$ *ist stetig, aber nicht L-stetig bei 0, und* $\alpha(t) \equiv 0$ *und* $\beta(t) = (t-\tau)^3$ *sind Integralkurven von* $\dot{x} = 3|x|^{2/3}$ *mit* $\alpha(\tau) = \beta(\tau) = 0$.

EX.:

[1] Ist $v : X \to E$ lokal Lipschitz-stetig und $v(\bar{x}) = 0$, so ist $\varphi : \mathbb{R} \to X$, $\varphi(t) \equiv \bar{x}$, die einzige Integralkurve zum Anfangswert $(\bar{\tau}, \bar{x})$.

[2] $I \subset \mathbb{R}$ offenes Intervall, $v : I \to \mathbb{R}$ stetig, $\bar{x} \in I$ so dass $v(\bar{x}) \neq 0$. Dann gibt es ein offenes Intervall $J \subset I$ um $\bar{x}$, so dass $v(x) \neq 0$ für alle $x \in J$, insbesondere ist

$$F : J \to \mathbb{R}, \ s \mapsto F(s) := \int_{\bar{x}}^{s} \frac{dx}{v(x)} + \bar{\tau}$$

streng monoton, besitzt also eine differenzierbare Umkehrfunktion $\varphi : U \to \mathbb{R}$ auf einem offenen Intervall U um $\bar{\tau}$. Wegen $F \circ \varphi = id_U$ ist $f'(\varphi(t)) \cdot \dot{\varphi}(t) = 1$, d.h.

$$\dot{\varphi}(t) = v(\varphi(t))$$

und $F \circ \varphi(\bar{\tau}) = \bar{\tau} = F(\bar{x})$ impliziert $\varphi(\bar{\tau}) = \bar{x}$, d.h. φ ist Integralkurve von v zum Anfangswert $(\bar{\tau}, \bar{x})$.
Ist beispielsweise $v(x) = 1 + x^2$, $\bar{\tau} = \bar{x} = 0$, so ist $F(s) = \arctan(s)$ und $\varphi(t) = \tan(t)$, $\frac{-\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$.

[HS] (Lemma von Gronwall[2])

$\varphi : [a, b] \to \overline{\mathbb{R}_+}$ stetig, $A, L \geq 0$ so dass $\varphi(t) \leq A + \int\limits_a^t L \cdot \varphi(s) ds$.
Dann ist $\varphi(t) \leq A \cdot e^{L(t-a)}, \quad t \in [a, b]$.

Beweis : $\varepsilon > 0,\ 0 < \varphi(t) + \varepsilon \leq \omega(t) = \varepsilon + A + \int\limits_a^t L \cdot \varphi(s) ds$. Dann ist $\frac{\omega'}{\omega} \leq L \cdot \frac{\varphi}{\varphi + \varepsilon} \leq L$ und damit $\omega(t) \leq (A + \varepsilon) \cdot \exp\big(L(t-a)\big)$. □

Beweis von 8.1.3: Sei $t \in [a, b]$. $\dot{\alpha}(t) - \dot{\beta}(t) = v(\alpha(t)) - v(\beta(t))$ impliziert

$$\begin{aligned} \|\alpha(t) - \beta(t)\| &\leq \|\alpha(a) - \beta(a)\| + \int\limits_a^t \|v(\alpha(s)) - v(\beta(s))\| ds \\ &\leq \|\alpha(a) - \beta(a)\| + L \int\limits_a^t \|\alpha(s) - \beta(s)\| ds \end{aligned}$$

□

[2] Thomas Hakon Grönvall (1877 - 1932), schwedischer Mathematiker und Ingenieur

Theorem 8.1.6. (Picard[3]-Lindelöf[4])
$\bar{x} \in X \subset E$ offen, $v : X \to E$ L-stetig, $\bar{\tau} \in \mathbb{R}$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ sowie eine stetige Abbildung

$$\Phi : (\bar{\tau} - \varepsilon, \bar{\tau} + \varepsilon) \times B_\delta(\bar{x}) \to X,$$

so dass

(1) $\overline{B}_{2\delta}(\bar{x}) \subset X$

(2) $\Phi(\bar{\tau}, x) = x$ *für alle* $x \in B_\delta(\bar{x})$

(3) Φ *partiell nach* t *differenzierbar und* $\dot{\Phi}(t, x) = v\big(\Phi(t, x)\big)$,

d.h. $(\bar{\tau} - \varepsilon, \bar{\tau} + \varepsilon) \ni t \mapsto \Phi_t(x) := \Phi(t, x)$ *ist Integralkurve des Vektorfeldes* v *zum Anfangswert* $(\bar{\tau}, x)$.

Beweis : Wähle $\Delta > 0$ so, dass $V := \overline{B_{2\Delta}(\bar{x})} \subset X$. Für $x \in V$ ist

$$\|v(x)\| \leq \|v(x) - v(\bar{x})\| + \|v(\bar{x})\| \leq L\|x - \bar{x}\| + \|v(\bar{x})\| \leq 2\Delta L + \|v(\bar{x})\| =: K.$$

Wähle $0 < \delta < \Delta$, $0 < \varepsilon < \min\left\{\frac{\Delta}{k+1}, \frac{1}{L+1}\right\}$. Definiere $W := (\bar{\tau} - \varepsilon, \bar{\tau} + \varepsilon) \times B_\delta(\bar{x})$ und $\Sigma := \{\varphi : W \to V \mid \varphi \text{ stetig}, \varphi(\bar{\tau}, x) = x\}$. Da $(V, \|\ \|)$ vollständig, ist auch $(\Sigma, \|\ \|_\infty)$ vollständig. Definiere

$$T : \Sigma \to E^W,\ T\varphi(t, x) = x + \int_{\bar{\tau}}^t v\big(\varphi(s, x)\big)ds.$$

$T\varphi$ stetig, $T\varphi(\bar{\tau}, x) = x$, $T\varphi(t, x) - \bar{x} = x - \bar{x} + \int_{\bar{\tau}}^t v(\varphi(s, x))ds$ impliziert
$\|T_\varphi(t, x) - \bar{x}\| \leq \delta + \varepsilon \cdot K < \Delta + \frac{\Delta}{k+1}K < 2\Delta$ d.h. $T : \Sigma \to \Sigma$; $(\dot{T\varphi})(t, x) = v\big(\varphi(t, x)\big)$.

$$\begin{aligned} \|T\varphi - T\psi\|_\infty &\leq \sup_W \int_{\bar{\tau}}^t \|v(\varphi(s, x)) - v(\psi(s, x))\|ds \leq \sup_W \quad L\|\varphi - \psi\|_\infty |t - \bar{\tau}| \\ &\leq \varepsilon \cdot L|\varphi - \psi\|_\infty < \frac{L}{L+1}\|\varphi - \psi\|_\infty, \end{aligned}$$

d.h. T ist kontrahierend und hat deshalb genau einen Fixpunkt $\phi = T\phi$, $\dot{\phi} = v \circ \phi$. □
Offenbar genügt es, dass v lediglich lokal-Lipschitz-stetig ist. Sind dann (I_φ, φ) Integralkurven von v zum Anfangswert $(\bar{\tau}, \bar{x})$ auf offenen Intervallen I_φ um $\bar{\tau}$, so ist

- $I := \bigcup_\varphi I_\varphi$ ein offenes Intervall
- $\varphi\big|_{I_\varphi \cap I_\psi} = \psi\big|_{I_\varphi \cap I_\psi}$.

Daher ist

$$\alpha : I \to X, \quad \alpha\big|_{I_\varphi} = \varphi$$

eine wohldefinierte maximale Integralkurve von v zum Anfangswert $(\bar{\tau}, \bar{x})$. Die Grenzen des Intervalls $I = (a_{\bar{x}}, b_{\bar{x}})$ heißen das sogenannte negative bzw. positive Lebensalter von $\bar{x}$ bzgl. v.

[3]Emile Picard (1856 - 1941), französischer Mathematiker
[4]Ernst Leonard Lindelöf (1870 - 1946), finnischer Mathematiker

Satz 8.1.7. *:*
$\bar{x} \in X \subset E$ offen, $\varphi : (a,b) \to X$ die maximale Integralkurve eines lokal-Lipschitz-stetigen Vektorfeldes $v : X \to E$ zum Anfangswert $(\bar{\tau}, \bar{x})$ und $b < \infty$.
Dann gibt es zu jedem Kompaktum $K \subset X$ ein $\bar{\tau} \leq b_K < b$, so dass

$$\varphi(t) \notin K \text{ für alle } t \geq b_K.$$

Beweis : Sonst gibt es ein Kompaktum $K \subset X$ und eine Folge $\bar{\tau} \leq t_n \to b,\ t_n < b$, so dass $\varphi(t_n) \in K$. Œ $\varphi(t_n) \to \overline{\overline{x}} \in K$. Zu dem Anfangswert $(b, \overline{\overline{x}})$ gibt es ein $\varepsilon > 0,\ \delta > 0$ sowie

$$\phi : (b - \varepsilon, b + \varepsilon) \times B_\delta(\overline{\overline{x}}) \to X$$

so dass

(1) $\phi(b, x) = x$ für alle $x \in B_\delta(\overline{\overline{x}}) \subset X$

(2) $\dot{\phi}(t, x) = v\big(\phi(t, x)\big)$.

Wähle $N \gg 0$ so, dass $\max\{b - \frac{\varepsilon}{2}, \bar{\tau}\} < t_N < b$, und definiere für $|t - t_N| < \varepsilon$ die Kurve

$$\psi(t) := \phi\big(t + (b - t_N),\ \varphi(t_N)\big).$$

Dann ist $\psi(t_N) = \varphi(t_N)$, $\dot{\psi}(t) = v\big(\psi(t)\big)$, d.h. $\psi = \varphi$ auf $(a,b) \cap (t_N - \varepsilon,\ t_N + \varepsilon)$. Dieses Intervall umfasst $\big[t_N, b + \frac{\varepsilon}{2}\big)$, d.h.

$$t \mapsto \begin{cases} \varphi(t) & t \leq t_N \\ \psi(t) & t_N \leq t < b + \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

ist eine Integralkurve von v zum Anfangswert $(\bar{\tau}, \bar{x})$, ein Widerspruch. $\square$