

Kapitel 2

Funktionen

2.1 Allgemeines über Variable und Funktionen

Grundlegend ist der Begriff der **Variablen** (in der Physik “Größen“ genannt). Beispiele für Variable, die in diesem Kurs vorkommen:

	Name:	Formelzeichen	Einheit
Physik:	Zeit	t	s, min, h, d, a
	Länge, Strecke, Entfernung, Weg	s, ℓ	m, km, cm, mm
	Fläche	A	m ² , km ² , cm ² , mm ²
	Volumen	V	m ³ , l(Liter), ml, cm ³
	Geschwindigkeit	v	m/s, km/h
	Beschleunigung	a	m/s ²
	Kraft	F	N(Newton)
	Druck	p	Pa(Pascal), hPa(= mbar)
	Temperatur	T	K(Kelvin)
	Celsiustemperatur	ϑ	⁰ C
	Masse	m	g, mg, μ g
Dichte	$\rho = \frac{m}{V}$	g/ml, g/cm ³	
Chemie:	Stoffmenge	n	mol
	Stoffmengenkonzentration	$c = \frac{n(\text{Komponente})}{V(\text{Lösung})}$	mol/l=M
	Massenkonzentration	$\rho^* = \frac{m(\text{Komponente})}{V(\text{Lösung})}$	g/l
	Massenanteil	$w = \frac{m(\text{Komponente})}{m(\text{Gemisch})}$	%
	Volumenanteil	$\frac{V(\text{Komponente})}{V(\text{Lösung})}$	Vol%
	molare Masse	$M_{\text{molar}} = \frac{m}{n}$	g/mol
Medizin:	Körpergröße		cm
	Körpergewicht		kg, bei Säuglingen g
	Blutdruck		mmHg
	Cholesterinspiegel		mg/100ml

Bezeichnung: Die Menge aller möglichen Werte einer Variablen heißt ihr **Wertebereich**.

Beispiel: Das Körpergewicht $m[g]$ von Neugeborenen ist eine reellwertige Variable mit Wertebereich $300 \leq m \leq 6000$.

Mathematische (= anonymisierende) Bezeichnung für Variable:

Variable mit Wertebereich in \mathbb{R} oder \mathbb{C} : x, y, z, u, v, w, \dots (hinteres Alphabet)

Variable mit Wertebereich in \mathbb{N} oder \mathbb{Z} : m, n, i, j, k, \dots (mittleres Alphabet)

Fest gegebene Zahlen heißen Konstante, z.B.: $\pi = 3,14\dots$, die universelle Gaskonstante R .

Anonymisierende Bezeichnung für Konstante: $a, b, c, \alpha, \lambda, \mu, \dots$ (vorderes und griechisches Alphabet).

Bezeichnung: Zwei Variable x, y heißen **voneinander unabhängig**, wenn jeder mögliche Wert der Variablen x mit jedem möglichen Wert der Variablen y zusammen auftreten kann.

Beispiele: Alter und Kontostand einer Person.

Körpergewicht und Intelligenzquotient eines Erwachsenen.

Bezeichnung: Die extremste Form der Abhängigkeit einer Variablen y von einer Variablen x liegt vor, wenn jeder mögliche Wert von x jeweils nur in Kombination mit einem einzigen ganz bestimmten, vom x -Wert abhängigen Wert von y zusammen auftreten kann. Dann heißt y eine **Funktion von x** (Schreibweise: $y=f(x)$), x die **freie Variable** der Funktion f , y die **abhängige Variable** von f .

Der Wertebereich der freien Variablen x heißt dann auch der **Definitionsbereich der Funktion f** , der Wertebereich der abhängigen Variablen y heißt auch der **Wertebereich der Funktion f** .

Beispiel: $x =$ Zeit t , $y =$ Luftdruck p in Marburg, Marktplatz. Dann ist $p = f(t)$.

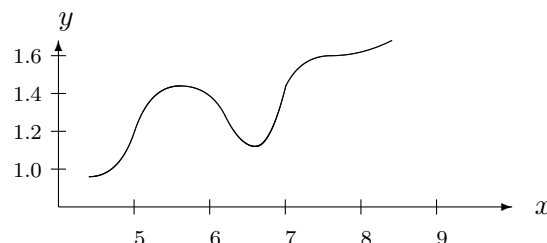
Informationen über Funktionen können in 4 unterschiedlichen Formen vorliegen, und zwar als

a) **Wertetabelle:**

x	0,023	0,500	1,750	3,000	5,000	...
y	0,27	0,82	1,70	2,00	2,40	...

Wertepaare (x_i, y_i) ($i = 1, \dots, n$) gewonnen aus Messungen oder Berechnungen.

b) **Graph:**



Punkte $(x_i|y_i)$ gewonnen mit Messgerät (z.B. Seismograph, EKG) oder durch Übertragung aus einer Wertetabelle. Der Graph heißt **vollständig**, wenn er alle möglichen Wertepaare $(x_i|y_i)$ darstellt.

Beachte: Die freie Variable muss auf der waagerechten, die abhängige Variable auf der senkrechten Achse abgetragen werden. Unterschiedliche Skalierung der Achsen erlaubt, Achsenschnittpunkt muss nicht der Punkt $(0|0)$ sein.

- c) **Wachstumsgesetz:** z.B.: “Bei kleineren Änderungen von x ist die relative Änderung von y proportional zur relativen Änderung von x .” (Gilt u.a. beim Größenvergleich zweier Organe bei höheren Organismen)
- d) **Berechnungsformel:** z.B. $x =$ Kantenlänge a des Quadrats, $y =$ Fläche A des Quadrats. Dann ist A eine Funktion von a und lässt sich aus a berechnen mittels der Formel

$$A = a^2.$$

Kriterium für Funktionen:

Die Variable y ist eine Funktion von x genau dann, wenn für Wertepaare (x_1, y_1) und (x_2, y_2) stets gilt: Wenn x_1 gleich x_2 ist, dann ist auch y_1 gleich y_2 .

Dieses Kriterium lässt als Sonderfall zu, dass auch eine Konstante c als Funktion von x aufgefasst wird: $f(x) = c$ für alle möglichen x -Werte.

Bezeichnung: Eine Funktion $y = f(x)$ heißt **umkehrbar**, wenn aus jedem möglichen Wert von y stets eindeutig auf den zugehörigen x -Wert zurückgeschlossen werden kann.

Dann ist auch x eine (andere!) Funktion von y : $x = g(y)$. Die Funktionen f und g heißen **Umkehrfunktionen voneinander**.

Kriterium für Umkehrfunktionen:

Die Funktion $y = f(x)$ ist umkehrbar genau dann, wenn für Wertepaare (x_1, y_1) und (x_2, y_2) stets gilt: Wenn y_1 gleich y_2 ist, dann ist auch x_1 gleich x_2 .

Beispiele: Eine konstante Funktion $f(x) = c$ ist nicht umkehrbar.

Der Luftdruck p in Marburg, Marktplatz, ist keine umkehrbare Funktion der Zeit t .

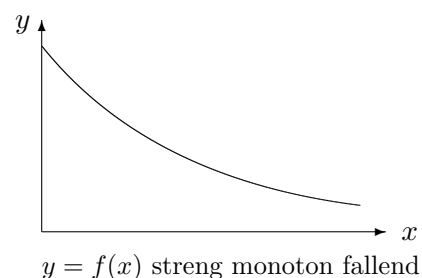
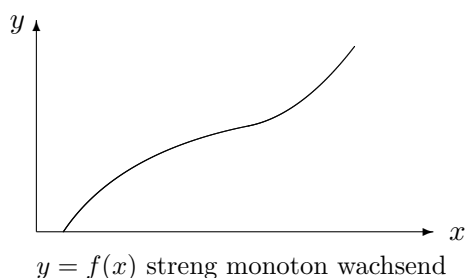
Die Fläche A des Quadrats ist eine umkehrbare Funktion der Kantenlänge a . Berechnungsformel der Umkehrfunktion: $a = \sqrt{A}$. (Dagegen ist die mathematische Funktion $y = x^2$, wenn sie den Definitionsbereich \mathbb{R} hat, nicht umkehrbar.)

Für umkehrbare Funktionen f gilt:

1. Wertetabellen für $y = f(x)$ sind zugleich brauchbar als Wertetabellen für die Umkehrfunktion $x = g(y)$.
2. Aus dem Graph von $y = f(x)$ entsteht der Graph von $x = g(y)$ durch Spiegelung der gesamten Skizze an der 1. Winkelhalbierenden.

Bezeichnung: Die Funktion $y = f(x)$ heißt

- **streng monoton wachsend**, wenn y größer wird, sobald x größer wird,
- **streng monoton fallend**, wenn y kleiner wird, sobald x größer wird.



Beispiel: Die Quadratfläche A ist eine streng monoton wachsende Funktion der Kantenlänge a , und auch die Kantenlänge a ist eine streng monoton wachsende Funktion der Fläche A . (Hingegen ist die Funktion $y = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, nicht monoton.)

Bezeichnung: Wenn der vollständige Graph einer Funktion $y = f(x)$ eine zusammenhängende Kurve ohne Sprünge ergibt, so heißt die Funktion **stetig**.

Dies bedeutet anschaulich, dass man den vollständigen Graphen in einem Zuge zeichnen kann, ohne den Stift mehrfach neu ansetzen zu müssen.

Die wissenschaftlich präzise Definition des Begriffes Stetigkeit ist völlig unanschaulich und führt dazu, dass auch noch gewisse Funktionen als stetig zu bezeichnen sind, deren Graph zu schwierig ist, als dass er sich überhaupt visualisieren ließe. Diese Definition wird in Abschnitt 3.3.1, S.32 nachgeliefert.

Regel 1 (Umkehrbarkeit von Funktionen):

R 1

Eine **stetige** Funktion $y = f(x)$ ist genau dann umkehrbar, wenn sie streng monoton wachsend oder streng monoton fallend ist.

2.2 Einfache Klassen von Funktionen

2.2.1 Proportionalitäten

Bezeichnung: Zwei Variable x und y heißen **proportional** zueinander, wenn der **Quotient** aller möglichen Wertepaare (x_i, y_i) **konstant** ist:

$$\frac{y_i}{x_i} = c \quad (i = 1, 2, 3, \dots)$$

Dann gelten die Berechnungsformeln

$$y = c \cdot x \quad \text{und} \quad x = \frac{1}{c} \cdot y.$$

Bezeichnung: Zwei Variable x und y heißen **antiproportional** zueinander, wenn das **Produkt** aller möglichen Wertepaare (x_i, y_i) **konstant** ist:

$$x_i \cdot y_i = c \quad (i = 1, 2, 3, \dots)$$

Dann gelten die Berechnungsformeln

$$y = c \cdot \frac{1}{x} \quad \text{und} \quad x = c \cdot \frac{1}{y}.$$

Es ist dann y **proportional** zur Variablen $\frac{1}{x}$ und x **proportional** zur Variablen $\frac{1}{y}$.

Regel 2 (Graphischer Test für Proportionalität/Antiproportionalität):

R 2

Zwei Variable x, y sind genau dann **proportional** zueinander, wenn die Punkte $(x_i | y_i)$ auf einer **Ursprungsgeraden** liegen. Steigung der Geraden = $\frac{y_i}{x_i} = c$.

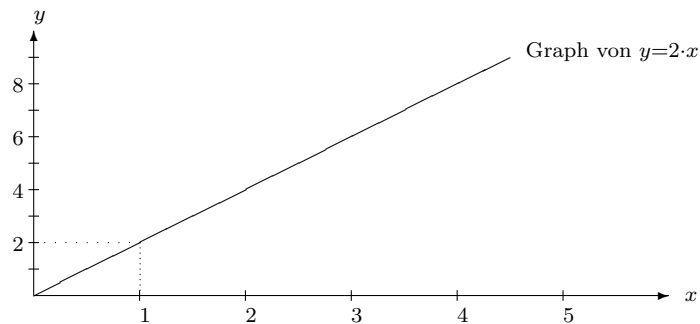
Zwei Variable x, y sind genau dann **antiproportional** zueinander, wenn die Punkte $(\frac{1}{x_i} | y_i)$ auf einer **Ursprungsgeraden** liegen. Steigung der Geraden = $y_i \cdot x_i = c$.

Beispiel für Proportionalität:

x	0,5	1,0	2,0	4,5
y	1,0	2,0	4,0	9,0

Es ist der Quotient $\frac{y_i}{x_i}$ stets = 2, also $c = 2$. Berechnungsformel für y als Funktion von x :

$$y = 2 \cdot x$$



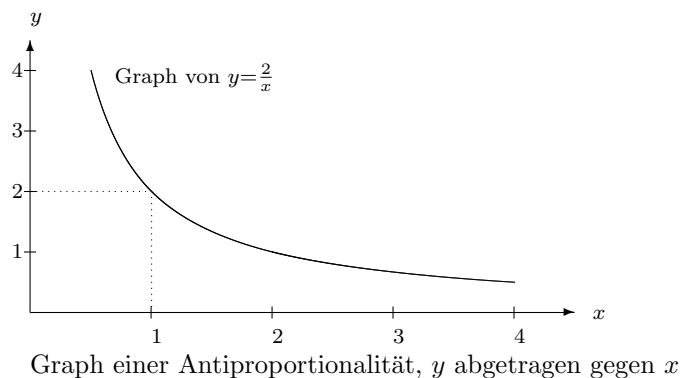
Beachte, dass wegen i.A. unterschiedlicher Maßstäbe auf beiden Achsen die Steigung (hier: 2) der Ursprungsgeraden nicht durch Augenschein, sondern nur durch Berechnung der Quotienten korrekt bestimmt werden kann.

Beispiel für Antiproportionalität:

x	0,5	1,0	2,0	4,0
y	4,0	2,0	1,0	0,5

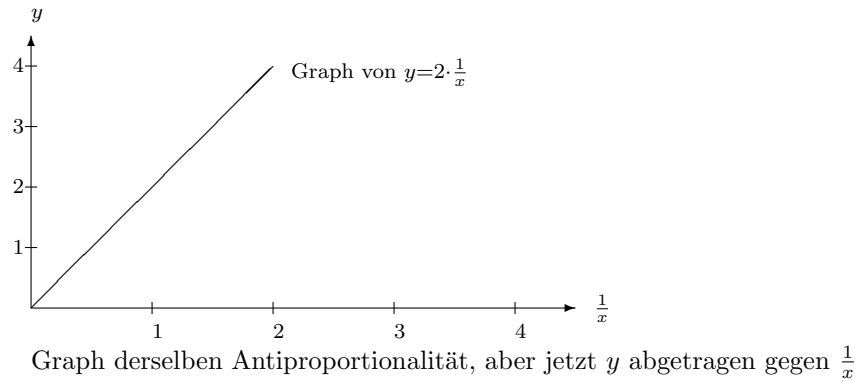
Es ist das Produkt $x_i \cdot y_i$ stets = 2, also $c = 2$. Berechnungsformel für y als Funktion von x :

$$y = 2 \cdot \frac{1}{x}$$



Aus den Werten von x werden die entsprechenden Werte der Variablen $\frac{1}{x}$ berechnet:

x	0,5	1,0	2,0	4,0
$\frac{1}{x}$	2,0	1,0	0,5	0,25
y	4,0	2,0	1,0	0,5



2.2.2 Anwendung: Proportionalität in der Mischungsrechnung

Nimmt man zur Herstellung einer Portion eines bestimmten Gemisches G

- die Menge x_1 von der Komponente A_1 ,
- die Menge x_2 von der Komponente A_2 ,
-
- die Menge x_k von der Komponente A_k ,

so muss man zur Herstellung der n -fachen Portion desselben Gemisches G die n -fachen Mengen von allen Komponenten nehmen, also $n \cdot x_1, n \cdot x_2, \dots, n \cdot x_n$.

Konstant bleiben dabei die Größenverhältnisse, d.h. die **Quotienten** der Mengen $\frac{x_1}{x_2}, \frac{x_2}{x_3}$ usw. Betrachtet man die x_i als **Variable**, welche die jeweilige Menge angeben, die zur Herstellung einer beliebigen Portion von G benötigt werden, so sind die x_i also paarweise **proportional** zueinander. Dabei können die Mengen entweder durch ihre Masse oder durch ihr Volumen angegeben werden.

Bezeichnung: Der Ausdruck $x_1 : x_2 : x_3 : \dots : x_k$ heißt das **Mischungsverhältnis** (je nach Sachlage auch das **Massenverhältnis** oder das **Volumenverhältnis**) des Gemisches G , wenn man zuvor erst alle Zahlen x_1, x_2, \dots, x_k mit einem gemeinsamen Faktor n multipliziert, so dass sie alle ganzzahlig werden, und sie anschließend alle durch ihren größten gemeinsamen Teiler dividiert.

Beispiel: Eine Portion eines Pulvers bestehe aus den Komponenten A, B, C in folgenden Mengen: 0,15g 0,45g 0,3g
 ganzzahlig (= mal 100): 15 45 30
 gekürzt (durch ggT. 15): 1 3 2
 Ergebnis: Das Massenverhältnis der Komponenten A, B, C im Pulver beträgt $1 : 3 : 2$. Oder auch: Das Pulver entsteht durch Mischung der Komponenten A, B, C im Massenverhältnis $1 : 3 : 2$.

Merke: Das Mischungsverhältnis ist eine Rezeptur ohne Bezug auf Volumen und Masse des Ergebnisses.
 Um ein Mischungsverhältnis zu berechnen, berechnet man zunächst die Rezeptur für eine beliebige Standardmenge (wahlweise 100ml, 1kg o.ä.).

2.2.3 Geradengleichungen

Berechnungsformel:

$$y = a + b \cdot x, \quad (a, b \in \mathbb{R}) \quad \text{“Achsenabschnittsformel“}$$

$a =$ Schnittpunkt mit der senkrechten Achse, $b =$ Steigung der Geraden.

Regel 3 (Kriterium für Geraden):

R 3

y als Funktion von x erfüllt genau dann eine Geradengleichung $y = a + b \cdot x$, wenn für alle möglichen zwei Wertepaare (x_1, y_1) und (x_2, y_2) gilt:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = b = \text{Steigung der Geraden,}$$

in Worten: Δy ist **proportional zu** Δx mit Proportionalitätskonstante b .

Durch Kehrwertbildung erhält man die

Folgerung: Wenn y als Funktion von x eine Geradengleichung mit einer Steigung $b \neq 0$ erfüllt, so ist auch x eine Funktion von y und erfüllt als solche eine Geradengleichung, aber mit der Steigung $\frac{1}{b}$ ($= \frac{\Delta x}{\Delta y}$).

Formel für die Gerade durch zwei gegebene Punkte $(x_1|x_2)$ und $(x_2|y_2)$:

$$y = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1) \quad \text{“Zweipunkteformel“}$$

Beweis : Nach Regel 3 erfüllen alle Punkte $(x|y)$, die mit den zwei vorgegebenen Punkten auf derselben Geraden liegen, die Bedingung

$$\begin{aligned} \frac{y - y_1}{x - x_1} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} && | \cdot (x - x_1) \\ y - y_1 &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1) && | + y_1 \\ y &= y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1) \end{aligned}$$

□

2.2.4 Anwendung: Interpolation

Ausgangslage: Man habe für die Variable y als Funktion von x keine Berechnungsformel, nur eine möglichst detaillierte, **nach x-Werten (auf- oder absteigend) sortierte Wertetabelle** mit möglichst kleiner Schrittweite Δx .

Problem: Gesucht ein Wertepaar, das in der Tabelle fehlt. Der Wert von x sei gegeben, der zugehörige y -Wert gesucht.

Interpolationsverfahren:

- 1. Schritt:** Ermittle die beiden benachbarten Wertepaare (x_i, y_i) und (x_{i+1}, y_{i+1}) in der sortierten Tabelle, zwischen denen das gesuchte, aber nicht vorhandene Wertepaar liegen müsste (weil der gegebene x -Wert zwischen x_i und x_{i+1} liegt).
- 2. Schritt:** Stelle die Gleichung der Geraden durch die 2 Punkte $(x_i|y_i)$ und $(x_{i+1}|y_{i+1})$ auf:

$$y = y_i + \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} \cdot (x - x_i),$$

setze den gegebenen x -Wert ein und berechne den zugehörigen y -Wert.

Ergebnisbewertung: Der vermutlich gebogene Kurvenverlauf des (unbekannten) Graphen von $y = f(x)$ ist im (kleinen) Abschnitt zwischen den beiden bekannten Kurvenpunkten $(x_i|y_i)$ und $(x_{i+1}|y_{i+1})$ behelfsweise durch eine Gerade ersetzt worden. Der berechnete y -Wert liefert den Geradenpunkt $(x|y)$, nicht den (eigentlich gesuchten) Kurvenpunkt. Der berechnete y -Wert ist der bestmögliche **Näherungswert** für $y = f(x)$, der mittels der Wertetabelle bestimmt werden kann.

2.2.5 Monome, Polynome und rationale Funktionen

Jede Funktion der Bauart

$$y = a \cdot x^n \quad (n \in \mathbb{N} \text{ oder } n = 0, a \in \mathbb{R} \text{ konstant})$$

(in Worten: “ y ist proportional zu einer ganzzahligen Potenz von x “) heißt ein **Monom**.

Addition endlich vieler Monome ergibt **ganzrationale Funktionen**, sogenannte **Polynome**:

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n \quad (a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R} \text{ konstant})$$

n heißt der **Grad des Polynoms** (falls $a_n \neq 0$).

Division zweier Polynome ergibt **rationale Funktionen**:

$$y = \frac{a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m} \quad (a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_m \in \mathbb{R} \text{ konstant})$$

Es gilt offenbar: Die Proportionalitäten $y = c \cdot x$ sind Spezialfälle von Geradengleichungen $y = a + b \cdot x$ (mit $a = 0, b = c$) und von Monomen (mit $n = 1$), die Geradengleichungen sind Spezialfälle von Polynomen (nämlich Polynome vom Grad 1) und die Antiproportionalitäten sowie und die Polynome sind Spezialfälle von rationalen Funktionen (die Antiproportionalitäten sind rationale Funktionen mit konstantem Zählerpolynom $= c$ und Nennerpolynom $= x$, die Polynome sind rationale Funktionen mit konstantem Nennerpolynom $= 1$).

Jede Variable y , die sich aus einer Variablen x durch bloße Anwendung der vier Grundrechnungsarten (Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division) exakt (nicht bloß näherungsweise) berechnen läßt, gehört zu einer der bisher besprochenen Klassen von Funktionen. Wir wollen sie die **elementaren Funktionen** nennen.

2.2.6 Anwendung: Polynome zur näherungsweise Berechnung stetiger Funktionen

Das Verfahren der Interpolation hat gezeigt, wie man die Klasse der Geradengleichungen dazu benutzen kann, kompliziertere Funktionen, von denen gar keine Berechnungsformel bekannt ist, näherungsweise zu berechnen. Die größere Klasse der Polynome spielt eine ähnlich nützliche Rolle. Auch Polynome sind sehr bequem auszurechnen, und es gilt folgender berühmter Sachverhalt:

Approximationssatz von Weierstraß¹

Ist die Funktion $y = f(x)$ im Abschnitt $a \leq x \leq b$ stetig und ist $\varepsilon > 0$ eine beliebig kleine, frei gewählte positive Zahl (z.B. 10^{-9}), so gibt es stets ein Polynom derart, dass sich die Funktionswerte des Polynoms von denen der Funktion $y = f(x)$ für alle $a \leq x \leq b$ um garantiert weniger als $\pm\varepsilon$ unterscheiden.

Dasselbe Polynom kann also zur näherungsweise Berechnung sämtlicher y -Werte in einem beliebig großen Bereich $a \leq x \leq b$ dienen, wobei jede gewünschte Genauigkeit erreichbar ist. (Vgl. damit, dass Interpolation nur in einem sehr kleinen Bereich $x_i \leq x \leq x_{i+1}$ brauchbare Näherungswerte liefert. Nur sehr viele verschiedene Interpolationsgeraden leisten das Gewünschte für einen größeren Bereich $a \leq x \leq b$.) Ein Gebiet der angewandten Mathematik (die sog. Approximationstheorie) beschäftigt sich damit, je nachdem, welche Informationen man über $y = f(x)$ schon besitzt, Algorithmen zum Auffinden passender Polynome zu liefern.

2.3 Funktionen mehrerer Variabler

Eine Variable y erscheint oft nur dadurch als Funktion einer einzigen Variablen x , dass man andere mitwirkende Variable (in Gedanken oder im Versuchsaufbau) künstlich konstant hält, d.h. Konstante in der Berechnungsformel für $y = f(x)$ sind evtl. selbst noch variabel, wenn man diese künstliche Rahmenbedingung weglässt.

Regel 4 (Proportionalität bei mehreren Variablen):

R 4

Sind u, v, w, \dots voneinander unabhängige Variable und ist die Variable y

- *proportional zu u , wenn nur u variiert, während v, w, \dots auf konstantem Wert stehen,*
- *proportional zu v , wenn nur v variiert, während u, w, \dots auf konstantem Wert stehen,*
- *proportional zu w , wenn nur w variiert, während u, v, \dots auf konstantem Wert stehen,*

\vdots

so gibt es eine von u, v, w, \dots unabhängige spezifische Konstante c , so dass die Berechnungsformel

$$y = c \cdot u \cdot v \cdot w \dots$$

gilt.

In dieser Formel wird y als eine Funktion von mehreren Variablen u, v, w, \dots verstanden. Die Konstante ist im konkreten Fall meist so berühmt, dass sie einen eigenen Namen und eine international einheitliche Buchstabenbezeichnung besitzt.

¹Karl Weierstraß (1815 - 1897), deutscher Mathematiker

Beispiel 1: Bei Schränken der Tiefe $T=0,60[\text{m}]$ und Höhe $H=2,00[\text{m}]$ ist das Volumen V Funktion einer einzigen Variablen, denn V ist proportional zur Breite B :

$$V = 1,2 \cdot B[\text{m}^3].$$

Aber die Proportionalitätskonstante $c = 1,2[\text{m}^2]$ ergibt sich als Produkt von Tiefe T und Höhe H , ändert sich also, wenn man diese Einflussgrößen auf einen anderen konstanten Wert setzt:

Für Schränkchen der Tiefe $T=0,30[\text{m}]$ und Höhe $H=0,80[\text{m}]$ ist V auch proportional zu B , also Funktion der einzigen Variablen B , aber jetzt mit der Berechnungsformel

$$V = 0,24 \cdot B[\text{m}^3],$$

die Proportionalitätskonstante hat sich, in Abhängigkeit von T und H , geändert. Da Tiefe T , Höhe H und Breite B voneinander unabhängige Variable sind, wird die globale Gesetzmäßigkeit für die Volumenberechnung gemäß *Regel 4* erfasst durch die Formel

$$V = c \cdot T \cdot H \cdot B$$

mit der von T , B und H unabhängigen spezifischen Konstanten $c = 1$. In dieser Formel erscheint V als eine Funktion von 3 Variablen.

Beispiel 2: Bei Portionen von idealen Gasen sind die Stoffmenge n , die Kelvintemperatur T und das Volumen V voneinander unabhängige Variable (jeder mögliche Wert der einen Variablen kann mit jedem möglichen Wert der anderen kombiniert auftreten). Variiert man nur eine der drei und lässt die zwei anderen auf konstantem Wert, so gilt bekanntlich:

Der Druck p ist

- proportional zur Stoffmenge n (bei konstantem T und V)
- proportional zur Temperatur T (bei konstantem n und V) und
- antiproportional zum Volumen V (bei konstantem n und T).

Da die letztere Eigenschaft bedeutet, dass p proportional zur Variablen $1/V$ ist, folgt aus allem zusammen die

allgemeine Gasgleichung:

$$p = R \cdot n \cdot T \cdot V^{-1},$$

wobei die spezifische Proportionalitätskonstante die universelle Gaskonstante

$$R = 8,31441 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1} = 8,31441 \text{ kPa l K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$$

ist.

Der Druck p wird in der obigen allgemeinen Gasgleichung als Funktion der drei Variablen n , T und V aufgefasst.

Durch Umformung erhält man z.B.

$$V = R \cdot n \cdot T \cdot p^{-1},$$

eine Formel, in der das Volumen als Funktion der drei Variablen n , T und p dargestellt wird.