Vollständige Halbordnungen

Eine *Halbordnung* $\mathcal{D} = \langle D, \leq \rangle$ (D für „domain“ (Bereich)) besteht aus

- einer nicht-leeren Menge D und
- einer reflexiven, antisymmetrischen und transitiven Relation $\leq$ auf D.

Sei $A \subseteq D, a \in D$.

- a heißt *obere Schranke* von A, falls $\forall b \in A : b \leq a$.
- a heißt *kleinstes Element* von A, falls $a \in A$ und $\forall b \in A : a \leq b$.
- A heißt *gerichtet*, falls $A \neq \emptyset$ und $\forall a, b \in A \; \exists c \in A : a \leq c \;\wedge\; b \leq c$.

Besitzt die Menge aller oberen Schranken von A ein kleinstes Element, so heißt dieses *kleinste obere Schranke von A* (least upper bound), in Zeichen: $\bigsqcup A$ oder lub A.

Eine Halbordnung $\mathcal{D} = \langle D, \leq \rangle$ heißt *vollständig*, falls

(i) $\mathcal{D}$ ein kleinstes Element $\perp_D \in D$ besitzt und

(ii) jede gerichtete Teilmenge $A \subseteq D$ in D eine kleinste obere Schranke $\bigsqcup A \in D$ hat.

Eine Halbordnung $\mathcal{D} = \langle D_\perp, \leq \rangle$ heißt *flach*, falls $D_\perp = D \cup \{\perp_D\}$ und

$$\forall a, b \in D_\perp : a \leq b \curvearrowright a = \perp_D \;\vee\; a = b.$$

Beispiele:

- $(\mathbb{N}, \leq)$ ist eine Halbordnung mit kleinstem Element,
  aber nicht vollständig.

- $(\mathcal{P}(M), \subseteq)$ mit nicht-leerem M ist eine vollständige Halbordung.

- ist eine vollständige Halbordnung.

```
o     o
|\   /|
| \ / |
|  \  |
| / \ |
|/   \|
o     o
 \   /
  \ /
   o
```

- flache Halbordnung $D_\perp = D \cup \{\perp^D\}$

  D : .... d_1 .... d_2 ....   mit $a \leq b :\curvearrowright a = \perp \vee a = b$

  \ /

  $\perp^D$

Stetige und strikte Funktionen

Seien $\mathcal{D}_i = \langle D_i, \leq_i \rangle$ $(1 \leq i \leq 2)$ vollständige Halbordnungen.

Eine Abbildung $f : D_1 {\longrightarrow} D_2$ heißt *stetig*, falls

(i) f monoton ist, d.h. $\forall a, b \in D_1 : a \leq_1 b \curvearrowright f(a) \leq_2 f(b)$, und

(ii) für alle gerichteten Teilmengen $A \subseteq D_1$ gilt:

$$f(\bigsqcup A) = \bigsqcup f(A).$$

Da A gerichtet und f monoton ist, folgt, dass

$$f(A) = \{f(a) | a \in A\}$$

gerichtet ist, und somit existiert $\bigsqcup f(A)$.

$$\begin{tikzcd} D_1 & D_2 \\ A \arrow[r, "f"] \arrow[d] & f(A) \arrow[d] \\ \bigsqcup A \arrow[r, "f"'] & \bigsqcup f(A) \end{tikzcd}$$

Eine Abbildung $f : D_1 {\longrightarrow} D_2$ heißt *strikt*, falls $f(\perp_{D_1}) = \perp_{D_2}$.

Beispiel:

strikte Funktionen auf flachen Halbordnungen $f : D_1 \to D_2$

$$\begin{array}{ccccc}
D_1 : \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \text{—}f \rightarrow & & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; : D_2 \\
\diagdown \qquad\qquad \diagup & & & & \diagdown \qquad\qquad \diagup \\
\perp^{D_1} & & \text{– Striktheit} \rightarrow & & \perp^{D_2}
\end{array}$$

gerichtete Teilmengen in D_1:

$$\begin{array}{lcll}
\{\perp^{D_1}\} & \mapsto & \{\perp^{D_2}\} & \\
\{\perp^{D_1}, a\} & \mapsto & \{\perp^{D_2}, b\} & (b = \perp^{D_2} \text{ ist möglich.}) \\
\{a\} & \mapsto & \{b\} & (b \in D_2 \cup \{\perp^{D_2}\})
\end{array}$$

Strikte Funktionen auf flachen Halbordnungen sind also stetig.

Fixpunktsatz von Tarski

Sei $\mathcal{D} = \langle D, \leq \rangle$ eine vollständige Halbordnung und $f : D \rightarrow D$ stetig.
Dann existiert

$$\bigsqcup \{ f^i(\perp_D) \mid i \geq 0 \} =: \mathit{fix}\ f \in D$$

und ist kleinster Fixpunkt von f, d.h.

$$f(\mathit{fix}\ f) = \mathit{fix}\ f \text{ und } \forall a \in D : f(a) = a \curvearrowright \mathit{fix}\ f \leq a.$$

Beweis:

1. Existenz von $\mathit{fix}\ f$:

   Da $\perp_D$ kleinstes Element von D ist, gilt: $\perp_D \leq f(\perp_D)$.
   Wegen der Monotonie von f folgt: $f(\perp_D) \leq f(f(\perp_D))$, also:
   $$\forall i \geq 0 : f^i(\perp_D) \leq f^{i+1}(\perp_D),$$
   d.h. $\{ f^i(\perp_D) \mid i \geq 0 \}$ ist gerichtet und
   da $\langle D, \leq \rangle$ vollständig, existiert $\bigsqcup \{ f^i(\perp_D) \mid i \geq 0 \}$.

2. $\mathit{fix}\ f$ ist Fixpunkt von f:

   Wegen der Stetigkeit von f gilt:
   $$\begin{aligned} f(\bigsqcup \{ f^i(\perp_D) \mid i \geq 0 \}) &= \bigsqcup f(\{ f^i(\perp_D) \mid i \geq 0 \}) \\ &= \bigsqcup \{ f^{i+1}(\perp_D) \mid i \geq 0 \} \\ &= \mathit{fix}\ f, \text{da } \perp_D \leq f^{i+1}(\perp_D)\ \forall i \geq 0 \end{aligned}$$

3. $\mathit{fix}\ f$ ist kleinster Fixpunkt von f:

   Sei $d \in D$ Fixpunkt von f, d.h. $f(d) = d$. Es gilt $\perp_D \leq d$ und
   wegen der Monotonie von f folgt: $f^i(\perp_D) \leq f^i(d) = d$.
   d ist also obere Schranke von $\{ f^i(\perp_D) \mid i \geq 0 \}$ und somit ist $\mathit{fix}\ f$ als kleinste obere Schranke dieser Menge $\leq d$.

Funktionen-, Summen- und Produktraum

Mit den vollständigen Halbordnungen $\mathcal{D}_1 = \langle D_1, \leq_1 \rangle$ und $\mathcal{D}_2 = \langle D_2, \leq_2 \rangle$ ist auch der Funktionenraum

$$[\mathcal{D}_1 {\rightarrow} \mathcal{D}_2] := \langle \{ f : D_1 {\rightarrow} D_2 \mid f \text{ stetig } \}, \leq \rangle$$

mit $f \leq g :\curvearrowright \forall a \in D_1 : f(a) \leq_2 g(a)$ eine vollständige Halbordnung.

Mit den vollständigen Halbordnungen $\mathcal{D}_1 = \langle D_1, \leq_1 \rangle$ und $\mathcal{D}_2 = \langle D_2, \leq_2 \rangle$ sind auch die

- verschmelzende Summe (coalesced sum)

  $$[\mathcal{D}_1 \bigoplus \mathcal{D}_2] := \langle D_1 \oplus D_2, \leq \rangle$$

  mit $D_1 \oplus D_2 := \{(i, d) \mid i \in \{1, 2\}, d_i \in D_i, d_i \neq \perp_{D_i}\} \cup \{\perp\}$
  $a \leq b :\curvearrowright a = \perp \vee (\exists i \in \{1, 2\} : a = (i, d_i) \wedge b = (i, d'_i) \wedge d_i \leq d'_i)$
  und die

- disjunkte Summe (disjoint sum)

  $$[\mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2] := \langle D_1 + D_2, \leq \rangle$$

  mit $D_1 + D_2 := \{1\} \times D_1 \cup \{2\} \times D_2 \cup \{\perp\}$
  $a \leq b :\curvearrowright a = \perp \vee (\exists i \in \{1, 2\} : a = (i, d_i) \wedge b = (i, d'_i) \wedge d_i \leq d'_i)$

vollständige Halbordnungen.

Mit den vollständigen Halbordnungen $\mathcal{D}_1 = \langle D_1, \leq_1 \rangle$ und $\mathcal{D}_2 = \langle D_2, \leq_2 \rangle$ ist auch der Produktraum

$$\mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2 := \langle D_1 \times D_2, \leq \rangle$$

mit $(a_1, b_1) \leq (a_2, b_2) :\curvearrowright a_1 \leq_1 a_2 \wedge b_1 \leq_2 b_2$ eine vollständige Halbordnung.