Turing-Berechenbarkeit für Funktionen über natürlichen Zahlen

Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichne $bin(n) \in \{0,1\}^+$ die Binärdarstellung von n (ohne führende Nullen).

Definition:

$\mathcal{A} = (Q, \{0,1,\#\}, \Gamma, \delta, q_0, b\!\!\!/, F) \in DTM(\{0,1,\#\})$

berechnet

$$f_{\mathcal{A}} : \mathbb{N}^k \dashrightarrow \mathbb{N} \text{ mit } f_{\mathcal{A}}(n_1, \ldots, n_k) := n,$$

falls

$$\begin{array}{ll} & q_0\ bin(n_1)\#bin(n_2)\# \ldots bin(n_k)b\!\!\!/ \\ \vdash_{\mathcal{A}}^* & \underbrace{\alpha\ q\ bin(n)b\!\!\!/\,\beta}_{\text{ohne Folgekonfiguration}} \end{array}$$

$f : \mathbb{N}^k \dashrightarrow \mathbb{N}$ heißt *Turing-berechenbar*, falls ein $\mathcal{A} \in DTM(\{0,1,\#\})$ existiert mit $f = f_{\mathcal{A}}$.

Beispiel: **Turingmaschine $\mathfrak{A}$ mit**
$f_{\mathfrak{A}}: \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto n+1$

$\mathfrak{A} = (\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{0,1\}, \{0,1,\flat\}, \delta, q_0, \flat, \emptyset)$ mit
δ gegeben durch *Turingtafel*:

q_0	0	0	R	q_0	% Suchen des rechten Wortendes
q_0	1	1	R	q_0	
q_0	$\flat$	$\flat$	L	q_1	
q_1	0	1	L	q_2	% Addition von 1
q_1	1	0	L	q_1	
q_1	$\flat$	1	N	q_2	
q_2	0	0	L	q_2	% Suchen des linken Wortrandes
q_2	1	1	L	q_2	
q_2	$\flat$	$\flat$	R	q_3	

Beispielrechnung:

$$\begin{array}{lllllll} q_0 101 & \vdash_{\mathfrak{A}} & 1q_0 01 & \vdash_{\mathfrak{A}} & 10q_0 1 & \vdash_{\mathfrak{A}} & 101q_0\flat \\ & \vdash_{\mathfrak{A}} & 10q_1 1\flat & \vdash_{\mathfrak{A}} & 1q_1 00\flat & \vdash_{\mathfrak{A}} & q_2 110\flat \\ & \vdash_{\mathfrak{A}} & q_2\flat 110\flat & \vdash_{\mathfrak{A}} & \flat q_3 110\flat & & \end{array}$$

Also $f_{\mathfrak{A}}(5) = 6$.

Syntax von LOOP

- *Variablen*: $\mathcal{V} := \{X_n \mid n \geqslant 1\}$

- *Wertzuweisungen*:

$$\mathcal{W} := \{ \begin{array}{ll} X_i := X_j + 1, & \\ X_i := 0 & \mid i, j \geqslant 1\} \end{array}$$

- *Anweisungen*:
  kleinste Menge $\mathcal{A}$ mit den Eigenschaften

  (i) $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{A}$

  (ii) $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ impliziert $\alpha; \beta \in \mathcal{A}$

  (iii) $\alpha \in \mathcal{A}, V \in \mathcal{V}$ impliziert
  $\underline{\texttt{loop}}\ V\ (\alpha) \in \mathcal{A}$

LOOP-Beispielprogramm

$$
\begin{aligned}
P_0 = \ & \underline{\texttt{in}}(X_1, X_2);\ \underline{\texttt{var}}(X_3);\\
& \underline{\texttt{loop}}\ X_1\\
& \qquad\qquad (\underline{\texttt{loop}}\ X_2\ (X_3 := X_3 + 1));\\
& X_1 := 0;\\
& \underline{\texttt{loop}}\ X_3\ (X_1 := X_1 + 1);\\
& \underline{\texttt{out}}\ X_1
\end{aligned}
$$

Semantik von P_0:

$$[\![P_0]\!] : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}, \qquad (a_1, a_2) \mapsto a_1 * a_2$$

Semantik von LOOP

- *Eingabeabbildung*:

$$\underline{\mathtt{in}}^{(n)}_{m} : \begin{cases} \mathbb{N}^n & \to \mathbb{N}^m \\ (a_1, \ldots, a_n) & \mapsto (a_1, \ldots, a_n, 0, \ldots, 0) \end{cases}$$

- *Ausgabeabbildung*:

$$\underline{\mathtt{out}}^{(m)}_{1} : \begin{cases} \mathbb{N}^m & \to \mathbb{N} \\ (a_1, \ldots, a_m) & \mapsto a_1 \end{cases}$$

- induktiv über den Aufbau von $\mathcal{A}$ definierte *Zustandstransformation*

$[\![\alpha]\!]^{(m)} : \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}^m$ ($\mathbb{N}^m$ Zustandsraum)

(i) $$[\![X_i := X_j + 1]\!]^{(m)}(a_1, \ldots, a_m) := (a_1, \ldots, a_{i-1}, a_j + 1, a_{i+1}, \ldots, a_m)$$
$$[\![X_i := 0]\!]^{(m)}(a_1, \ldots, a_m) := (a_1, \ldots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \ldots, a_m)$$

(ii) $$[\![\alpha; \beta]\!]^{(m)} := [\![\beta]\!]^{(m)} \circ [\![\alpha]\!]^{(m)}$$

(iii) $$[\![\underline{\mathtt{loop}}\ X_i\ (\alpha)]\!]^{(m)}(a_1, \ldots, a_m) := ([\![\alpha]\!]^{(m)})^{a_i}(a_1, \ldots, a_m)$$

Primitiv-rekursive Grundfunktionen

- *Nachfolgerfunktion*: $S : \begin{cases} \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{N}, \\ a & \mapsto & a+1 \end{cases}$
- *Nullkonstante*: $0 : \begin{cases} \mathbb{N}^0 & \rightarrow & \mathbb{N}, \\ () & \mapsto & 0 \end{cases}$
- *Projektion*: $pr_i^{(n)} : \begin{cases} \mathbb{N}^n & \rightarrow & \mathbb{N}, \\ (a_1, \ldots, a_n) & \mapsto & a_i \end{cases}$

Komposition

Für $f : \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$ und $f_1, \ldots, f_n : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ ist die Komposition

$$f \circ [f_1, \ldots, f_n] : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$$

definiert durch

$$(a_1, \ldots, a_k) \mapsto f(f_1(a_1, \ldots, a_k), \ldots, f_n(a_1, \ldots, a_k))$$

Primitive Rekursion

Für $f : \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$ und $g : \mathbb{N}^{n+2} \rightarrow \mathbb{N}$ heißt

$$h : \mathbb{N}^{n+1} \rightarrow \mathbb{N}$$

mit

$$\begin{array}{lcl} h(a_1, \ldots, a_n, 0) & = & f(a_1, \ldots, a_n) \\ h(a_1, \ldots, a_n, a+1) & = & g(a_1, \ldots, a_n, a, h(a_1, \ldots, a_n, a)) \end{array}$$

durch primitive Rekursion aus f und g erzeugt.

Syntax von WHILE

- *Variablen*: $\mathcal{V} := \{X_i \mid i \geqslant 1\}$

- *Wertzuweisungen*:

$$\mathcal{W} := \{ \begin{array}{l} X_i := X_j + 1, \\ X_i := X_j - 1, \\ X_i := X_j, \\ X_i := 0 \qquad\qquad \mid i, j \geqslant 1\} \end{array}$$

- *Anweisungen*:
  kleinste Menge $\mathcal{A}$ mit den Eigenschaften

  (i) $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{A}$

  (ii) $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ impliziert $\alpha; \beta \in \mathcal{A}$

  (iii) $\alpha \in \mathcal{A}$, $X_i \in \mathcal{V}$ impliziert
  $\underline{\texttt{while}}\ X_i \neq 0\ \underline{\texttt{do}}\ \alpha\ \underline{\texttt{od}} \in \mathcal{A}$

$\mathtt{WHILE}$-Beispielprogramm

$$
\begin{aligned}
P_1 = \quad & \underline{\mathtt{in}}(X_1, X_2);\ \underline{\mathtt{var}}(X_3, X_4); \\
& \underline{\mathtt{while}}\ X_1 \neq 0\ \underline{\mathtt{do}} \\
& \qquad X_4 := X_2; \\
& \qquad \underline{\mathtt{while}}\ X_4 \neq 0\ \underline{\mathtt{do}} \\
& \qquad\qquad X_3 := X_3 + 1; \\
& \qquad\qquad X_4 := X_4 - 1 \\
& \qquad \underline{\mathtt{od}}; \\
& \qquad X_1 := X_1 - 1 \\
& \underline{\mathtt{od}}; \\
& X_1 := X_3; \\
& \underline{\mathtt{out}}\ X_1
\end{aligned}
$$

Semantik von P_1:

$[\![P_1]\!] : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}, \qquad (a_1, a_2) \mapsto a_1 * a_2$

Semantik der `WHILE` -Anweisung

$$[\![\ \underline{\texttt{while}}\ \ X_i \neq 0\ \ \underline{\texttt{do}}\ \ \alpha\ \ \underline{\texttt{od}}\ ]\!]^{(m)}(\bar{a})$$

$$:= \begin{cases} ([\![\alpha]\!]^{(m)})^k(\bar{a}), & \text{falls für alle } 1 \leqslant \nu < k : \\ & ([\![\alpha]\!]^{(m)})^\nu(\bar{a})\text{def. } \text{ und} \\ & pr_i^{(m)}(([\![\alpha]\!]^{(m)})^\nu(\bar{a})) > 0 \\ & \text{und} \\ & ([\![\alpha]\!]^{(m)})^k(\bar{a})\text{def. } \text{ und} \\ & pr_i^{(m)}(([\![\alpha]\!]^{(m)})^k(\bar{a})) = 0 \\ \text{nicht def.} & \text{sonst} \end{cases}$$

Minimalisierung:

Für $f : \mathbb{N}^{n+1} \dashrightarrow \mathbb{N}$ heißt

$$\mu(f) : \mathbb{N}^n \dashrightarrow \mathbb{N}$$

mit

$$\mu(f)(\bar{a}) := \begin{cases} b \in \mathbb{N} & \text{falls } f(\bar{a}, b) = 0 \text{ und} \\ & \forall c < b : f(\bar{a}, c) > 0 \\ \text{nicht def.} & \text{sonst} \end{cases}$$

Minimalisierung von f.

Syntax von GOTO

- *Variablen*: $\mathcal{V} := \{X_i \mid i \geqslant 1\}$

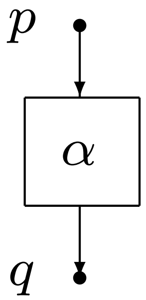
- *Wertzuweisungen*:

$$\mathcal{W} := \{ \begin{array}{ll} X_i := X_j + 1, & \\ X_i := X_j - 1, & \\ X_i := X_j, & \\ X_i := 0 & \mid i, j \geqslant 1\} \end{array}$$

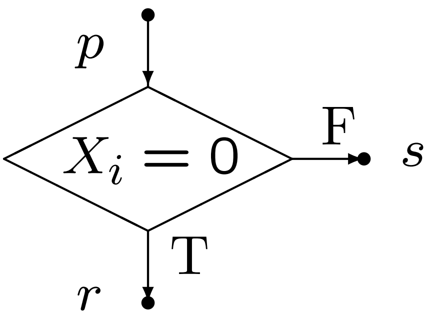
- *Befehle*:

$$\mathcal{B} := \{ \begin{array}{l} p : \alpha \ \underline{\texttt{goto}}\ q; \\ p : \underline{\texttt{if}}\ X_i = 0 \ \underline{\texttt{then}}\ \underline{\texttt{goto}}\ q \\ \qquad\qquad\qquad \underline{\texttt{else}}\ \underline{\texttt{goto}}\ r \quad \mid \\ p, q, r \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathcal{W}, i \in \mathbb{N} \ \} \end{array}$$

Flußdiagramme zu **GOTO**-Programmen

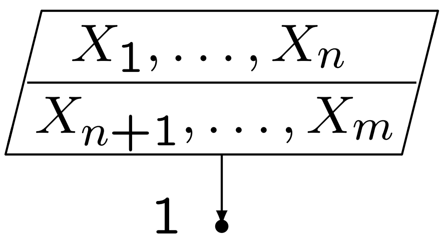


repräsentiert $p : \alpha\ \underline{\texttt{goto}}\ q$

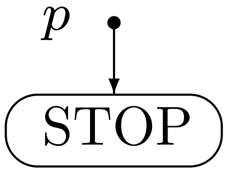


repräsentiert

$$
\begin{array}{ll}
p : \underline{\texttt{if}} & X_i = 0 \\
 & \underline{\texttt{then}}\ \underline{\texttt{goto}}\ r \\
 & \underline{\texttt{else}}\ \underline{\texttt{goto}}\ s
\end{array}
$$



repräsentiert $\underline{\texttt{in}}(X_1, \ldots, X_n)$; $\underline{\texttt{var}}(X_{n+1}, \ldots, X_m)$



falls p keine Linksmarke im Programm

Beispiel:

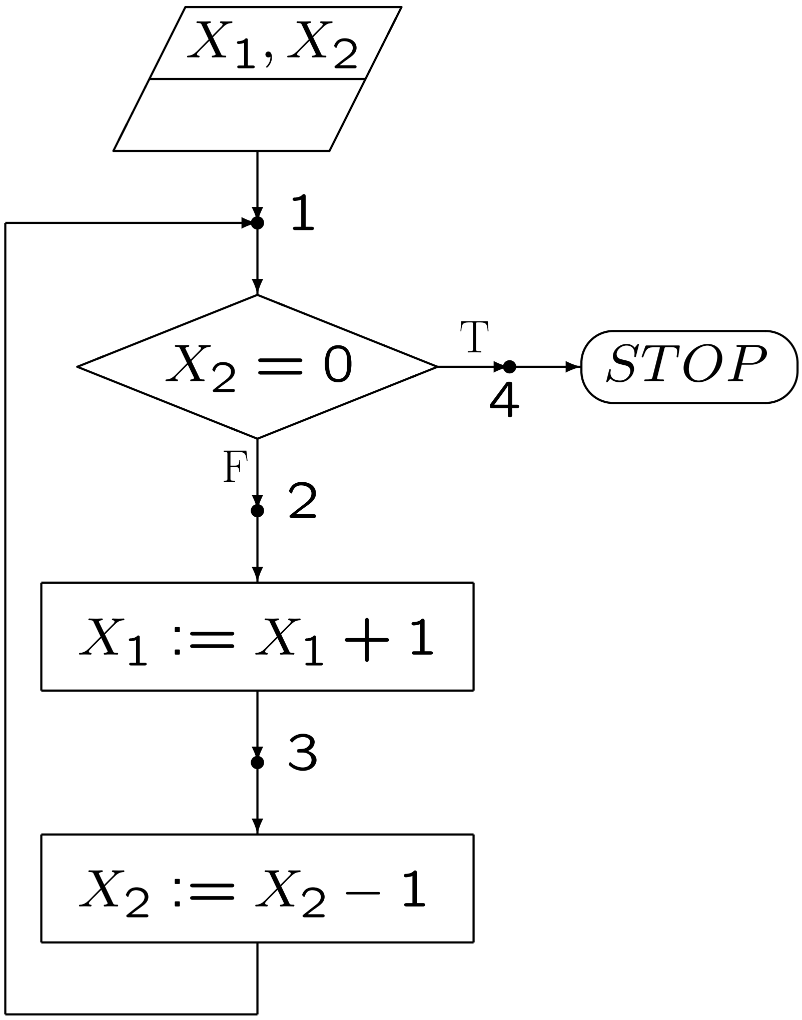
$\underline{\texttt{in}}(X_1, X_2);\ \underline{\texttt{var}}();$

$1:\ \underline{\texttt{if}}\quad X_2 = 0$
$\quad\underline{\texttt{then}}\ \underline{\texttt{goto}}\ 4$
$\quad\underline{\texttt{else}}\ \underline{\texttt{goto}}\ 2;$

$2:\quad X_1 := X_1 + 1$
$\quad\underline{\texttt{goto}}\ 3;$

$3:\quad X_2 := X_2 - 1$
$\quad\underline{\texttt{goto}}\ 1;$

$\underline{\texttt{out}}\ X_1$



Überblick