PHILIPPS-UNIVERSITÄT MARBURG
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. R. Loogen

D-35032 Marburg
Hans-Meerwein-Straße
Lahnberge

Klausur zur „Theoretischen Informatik“, Sommersemester 2005

12. Juli 2005

Hinweise:

- **Bearbeitungszeit:** 2 Stunden
  Gesamtpunktzahl: 100 Punkte
  Zum Bestehen der Klausur sind **40 Punkte** erforderlich.
- Hilfsmittel sind nicht erlaubt.
- Jede Aufgabe ist auf einem eigenen Blatt zu bearbeiten.
- Alle ausgehändigten Blätter sind zurückzugeben und, soweit beschrieben, mit Namen zu versehen. Auch der Klausurtext ist abzugeben.

Viel Erfolg!

Name: ....

Matr.-Nr.: .... **Studienfach:** ....

Studiengang: ◯ **Diplom** ◯ **Bachelor** ◯ **Magister**

Aufgabe	max. Punktzahl	erreichte Punktzahl	korrigiert von
1	10		
2	10		
3	8		
4	14		
5	10		
6	12		
7	10		
8	11		
9	9		
10	6		
Summe	100		

Note:

Klausur zur Theoretischen Informatik, 12. Juli 2005

1. Geben Sie für jedes der folgenden Paare von formalen Sprachen über dem Alphabet $\{0,1\}$ an, ob die Sprachen ineinander enthalten sind, gleich sind oder schief zueinander liegen, d.h. dass keine der beiden Sprachen die andere enthält. Begründen Sie Ihre Antworten. 10 Punkte

   (a) $L_{a1} = [\![(0+1)^*11(0+1)^*]\!]$ und $L_{a2} = [\![(0^*1^*11)^*0^*110^*1^*]\!]$ / 3

   (b) $L_{b1} = L(G)$ mit $G : S \to 0S1 \mid 1S0 \mid \varepsilon$ und $L_{b2} = [\![(01+10)^*]\!]$ / 3

   (c) $L_{c1} = L(\mathcal{A})$ mit $\mathcal{A} = (\{p,q\},\{0,1\},\delta,q,\{q\}) \in \mathbf{NFA}(\Sigma)$ mit / 4

$$\delta : \begin{array}{c|cc} Q\backslash\Sigma & 0 & 1 \\ \hline q & \{p\} & \emptyset \\ p & \{p,q\} & \{p\} \end{array} \quad \text{und}$$

   $L_{c2} = L(G)$ mit $G : S \to AS \mid \varepsilon, A \to 0B$, und $B \to 0B \mid 1B \mid 0$.

2. Bestimmen Sie zu den folgenden Sprachen über dem Alphabet $\Sigma = \{a,b\}$ jeweils einen regulären Ausdruck, der die Sprache beschreibt. 10 Punkte

   (a) L_a enthalte alle Wörter, in denen das Teilwort *aa* *nicht* vorkommt. / 3

   (b) L_b sei die Menge aller Wörter mit gleichvielen a's wie b's, in denen die Teilwörter *aa* und *bb* nicht enthalten sind. / 3

   (c) L_c enthalte alle Wörter, in denen alle Teilwörter *aa* vor allen Teilwörtern *bb* vorkommen. / 4

3. Sei $G = (\{S,A,B\},\Sigma,P,S)$ mit $\Sigma = \{a,b\}$ und 8 Punkte

$$P \ : \quad S \to aB \quad B \to aC \mid bA \mid b \quad A \to aB \mid \varepsilon \quad C \to bS.$$

   (a) Konstruieren Sie aus G einen NFA $\mathcal{A}$ mit $L(\mathcal{A}) = L(G)$. / 3

   (b) Bestimmen Sie einen regulären Ausdruck α mit $[\![\alpha]\!] = L(G)$. / 5

4. Ordnen Sie die folgenden Sprachen in die Chomsky-Hierarchie ein und beweisen Sie Ihre Aussagen. 14 Punkte

   (a) $L_1 = \{w \in \{0,1\}^* \mid$ für alle Präfixe u von w gilt: $-2 \le |u|_0 - |u|_1 \le 2\}$ / 4

   (b) $L_2 = \{w \in \{a,b,c\}^* \mid |w|_a = |w|_b$ und die Teilwörter *aa* und *bb* kommen nicht vor. $\}$ / 10

5. Sei $G = (\{S\},\Sigma,P,S)$ mit $\Sigma = \{a,b\}$ und $P \ : \ S \to aSbS \mid aS \mid \varepsilon$. 10 Punkte
   Zeigen Sie: Ist $w \in L(G)$ und $u \in \Sigma^*$ ein Präfix von w, so gilt: $|u|_b \le |u|_a$.

6. Richtig oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort. 12 Punkte

   (a) Die Klasse der *nicht-regulären* Sprachen ist unter Durchschnitt abgeschlossen. / 3

   (b) Für jede deterministisch kontextfreie Sprache L hat die Nerode-Relation ϱ_L unendlich viele Äquivalenzklassen. / 3

   (c) In einer Chomsky-Normalform-Grammatik hat eine Ableitung der Satzform $aBcDe$ die Länge 9. / 3

   (d) Jede von einem nichtdeterministischen Kellerautomaten akzeptierte Sprache kann sogar von einem nichtdeterministischen Kellerautomaten akzeptiert werden, der in jedem Schritt das Zeichen auf der Kellerspitze entweder löscht oder durch maximal zwei Kellersymbole ersetzt. / 3

7. Geben Sie eine Turingmaschine mit möglichst kurzer Turingtafel an, die die Funktion $add : \begin{cases} \{1\}^* \times \{1\}^* & \to & \{1\}^* \\ (1^k, 1^m) & \mapsto & 1^{k+m} \end{cases}$ berechnet. 10 Punkte

   Erläutern Sie die Arbeitsweise Ihrer Maschine und geben Sie die Konfigurationsfolge für die Eingabe 111$11111 an.

8. Gegeben sei das folgende Fragment eines LOOP-Programms. 11 Punkte

```
in (X1); var (X2);
loop X1 (
  X1 := 0;
  loop X2 ( X1 := ... )
  X2 := ...
  )
out X1.
```

   (a) Ergänzen Sie die beiden Lücken in dem Programm so, dass die Vorgängerfunktion / 3

$$\text{pred} : \begin{cases} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{falls } n = 0 \\ k & \text{falls } n = k+1 \end{cases} \end{cases}$$

   berechnet wird.

   (b) Zeigen Sie die Korrektheit Ihres Programms, indem Sie seine Semantik bestimmen. / 8

9. Zeigen Sie, dass die arithmetische Division $div : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \dashrightarrow \mathbb{N}$ mit 9 Punkte

$$div(x, y) = \begin{cases} n & \text{falls } n \text{ minimal mit } n * y \leq x < (n+1) * y \\ \text{nicht definiert} & \text{sonst} \end{cases}$$

   μ-rekursiv ist.

   Sie können voraussetzen, dass die Addition, Subtraktion, Multiplikation und Vorgängerfunktion primitiv rekursiv sind.

10. Gegeben sei ein Alphabet Σ. Zeigen Sie: 6 Punkte

   Ist L semi-entscheidbar mit $(\Sigma^* \setminus L) \leq L$, so ist L entscheidbar.

Aushang der Ergebnisse

morgen Vormittag auf Ebene D5 (Lahnberge)

Klausureinsicht

Dienstag, 19. Juli, 11.00 - 12.00 Uhr
Seminarraum V (Ebene D5, Lahnberge)

Wiederholungsklausur

Mittwoch, 19. Oktober, 9 -11 Uhr