PHILIPPS-UNIVERSITÄT MARBURG
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. R. Loogen
Dipl.-Inform. Jost Berthold

D-35032 Marburg
Hans Meerwein Straße
Lahnberge

3. Juni 2003

Übungen zur „Semantik von Programmiersprachen", SS 2003

Nr. 5, Besprechung der mündlichen Aufgaben: 6. Juni in der Übung, Abgabe der Hausaufgaben: 10. Juni in der Vorlesung

---

A. Mündliche Aufgaben

5.1 (a) Definieren Sie, wann eine logische Variable *frei* oder durch Quantoren *gebunden* in einer Zusicherung auftritt.

(b) Beschreiben Sie formal die Substitution einer logischen Variablen $i \in \mathbf{IVar}$ durch eine Zahl $z \in \mathbf{N}$ in einer Zusicherung $A \in \mathbf{Assn}$ bzw. einem arithmetischen Ausdruck $a \in \mathbf{LExp}$ (Schreibweise: $A[i \mapsto z]$ bzw. $a[i \mapsto z]$).

(c) Zeigen Sie, dass für alle $a \in \mathbf{LExp}$, $i \in \mathbf{IVar}$, $z \in \mathbf{N}$, $I \in \mathcal{I}$ und $\sigma \in \Sigma$ gilt:

$$\mathcal{L}[\![a]\!]I[i \mapsto z]\sigma = \mathcal{L}[\![a[i \mapsto z]]\!]I\sigma$$

(d) Zeigen Sie, dass für alle $A \in \mathbf{Assn}$, $i \in \mathbf{IVar}$, $I \in \mathcal{I}$ und $\sigma \in \Sigma$ gilt:

$$\sigma \models^I \forall i.A \text{ gdw. } \sigma \models^I A[i \mapsto z] \text{ für alle } z \in \mathbf{N}$$

5.2 Bestimmen Sie eine geeignete Invariante, mit deren Hilfe sich die folgende partielle Korrektheitsaussage nachweisen lässt:
$\{Y = i \wedge X = 1\}$ **while** $\neg(Y = 0)$ **do** $(Y := Y - 1; X := 2 * X)$ $\{X = 2^i\}$.

B. Hausaufgaben

Die Abgabe der Hausaufgaben ist in Zweiergruppen erlaubt.

5.3 Gegeben sei die folgende Anweisung $c \in \mathbf{Com}$: **5 Punkte**

$Z := 0;$ **while** $Y \leq X$ **do** $(Z := Z + 1; X := X - Y)$.

(a) Formulieren Sie eine partielle Korrektheitsaussage für c, die folgendes ausdrückt: Wenn die Programmausführung in einem Zustand $\sigma \in \Sigma$ mit $\sigma(X) > 0$ und $\sigma(Y) > 0$ startet und in einem Zustand $\sigma' \in \Sigma$ endet, dann gilt

$$\sigma'(Z) = \sigma(X) \ \mathbf{div}\ \sigma(Y) \text{ und } \sigma'(X) = \sigma(X) \ \mathbf{mod}\ \sigma(Y)$$

(b) Weisen Sie die Gültigkeit Ihrer Aussage mit Hilfe der Hoare-Regeln (Definition 5.6 der Vorlesung) nach.

5.4 Zeigen Sie die Korrektheit der Beweisregel für die **while**-Schleife mithilfe der operationellen Semantik, d.h. zeigen Sie für $b \in \mathbf{BExp}$, $c \in \mathbf{Com}$ und $A \in \mathbf{Assn}$, dass aus $\vdash \{A\}$ **while** b **do** c $\{A \wedge (\neg b)\}$ folgt: **3 Punkte**

Für alle $\sigma, \sigma' \in \Sigma$ und $I \in \mathcal{I}$ mit $\sigma \models^I A$ und $\langle \mathbf{while}\ b\ \mathbf{do}\ c, \sigma\rangle \to \sigma'$ gilt: $\sigma' \models^I A \wedge \neg b$.

5.5 Entwickeln Sie, ohne von der Existenz der **while**-Anweisung auszugehen, eine Beweisregel für eine Anweisung der Form **for** $X := a_1$ **to** a_2 **do** c, wobei $X \in \mathbf{Loc}$, $a_1, a_2 \in \mathbf{AExp}$ und $c \in \mathbf{Com}$ seien. **4 Punkte**