

## Übungen zur „Theoretischen Informatik“, Sommersemester 2005

### Nr. 11, Abgabe: Dienstag, 28. Juni 2005 vor der Vorlesung

Am Mittwoch, dem 29. Juni, entfallen die Vorlesung und die Übungen wegen des Sport-Dies. Die Übungen werden am darauffolgenden Montag, dem 4. Juli, um 14 bzw. 16 Uhr im HS I, Lahnberge nachgeholt.

#### A. Hausaufgaben

47. Geben Sie eine ausführlich kommentierte Turingmaschine an, die zu einer vorzeichen-behafteten Binärzahl die Zweierkomplementdarstellung berechnet. 4 Punkte

**Hinweis:** Wenn das als Vorzeichen interpretierte erste Bit Eins ist, wird das Zweierkomplement durch Komplementieren jedes Bits (bis auf das Vorzeichenbit) und anschließendem Aufaddieren einer Eins ermittelt. Ansonsten entspricht die Zweierkomplementdarstellung der vorzeichenbehafteten Darstellung.

48. Schreiben Sie ein LOOP-Programm zur Berechnung der Signumfunktion: 4 Punkte

$$sg : \begin{cases} \mathbb{N} & \rightarrow \mathbb{N} \\ n & \mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } n = 0 \\ 1 & \text{falls } n > 0 \end{cases} \end{cases}$$

Als Wertzuweisungen sind nur elementare Anweisungen der Form  $X_i := 0$  bzw.  $X_i := X_j + 1$  zugelassen.

Beweisen Sie die Korrektheit des Programms anhand der denotationellen Semantik.

49. Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen aus den primitiv rekursiven Grundfunktionen durch Anwendung von Komposition und primitiver Rekursion erzeugt werden können: 4 Punkte

$$(a) \text{ sub} : \begin{cases} \mathbb{N}^2 & \rightarrow \mathbb{N} \\ (a, b) & \mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } a \leq b \\ a - b & \text{sonst} \end{cases} \end{cases} \quad (b) \text{ max} : \begin{cases} \mathbb{N}^2 & \rightarrow \mathbb{N} \\ (a, b) & \mapsto \begin{cases} a & \text{falls } a \geq b \\ b & \text{sonst} \end{cases} \end{cases}$$

#### B. Mündliche Aufgabe

50. Sei  $n \in \mathbb{N}$  und  $f : \mathbb{N}^{n+1} \rightarrow \mathbb{N}$ . Dann heißt

$$\mu_b(f) : \mathbb{N}^{n+1} \rightarrow \mathbb{N} \quad \text{mit} \quad \mu_b(f)(\bar{a}, z) := \begin{cases} y \in \mathbb{N} & \text{falls } 0 \leq y \leq z, f(\bar{a}, y) = 0 \\ & \text{und } \forall x < y : f(\bar{a}, x) > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

die *beschränkte Minimalisierung* von  $f$ . Zeigen Sie:

- (a) Mit  $f$  ist auch  $\mu_b(f)$  primitiv rekursiv.  
(b) Die arithmetische Division

$$\text{div} : \begin{cases} \mathbb{N}^2 & \rightarrow \mathbb{N} \\ (x, y) & \mapsto \begin{cases} \max\{z \mid z * y \leq x\} & \text{falls } y \neq 0 \\ 0 & \text{falls } y = 0 \end{cases} \end{cases}$$

ist primitiv rekursiv.