PHILIPPS-UNIVERSITÄT MARBURG
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. R. Loogen

D-35032 Marburg
Hans Meerwein Straße
Lahnberge

28. Juni 2005

Übungen zur „Theoretischen Informatik“, Sommersemester 2005

Nr. 12 (letztes Blatt), Abgabe: Dienstag, 5. Juli 2005 vor der Vorlesung

---

Hinweise zur Klausur:	Termin:	Dienstag, 12. Juli 2005, 11.00 bis 13.15 Uhr
	Ort:	Hörsaal 214 (Audimax), Biegenstraße 14
	Arbeitszeit:	120 Minuten
	Hilfsmittel:	keine.

Bitte bringen Sie zur Klausur **Ihren Studenten- und Personalausweis** sowie Schreibutensilien mit! Das Papier wird gestellt.

A. Hausaufgaben

51. Gegeben seien totale berechenbare Funktionen $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ und $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. **4 Punkte**

    Sei $M := \{x \in \mathbb{N} \mid \exists y \in \mathbb{N} : f(x) = g(y)\}$.

    Zeigen Sie durch Angabe einer μ-rekursiven Funktion $h : \mathbb{N} - \rightarrow \mathbb{N}$ mit Definitionsbereich M, dass M rekursiv aufzählbar ist.

52. Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ heißt geordnet aufzählbar, wenn es ein Aufzählungsverfahren gibt, dass die Wörter von L in ihrer lexikographischen Reihenfolge ausgibt. **4 Punkte**

    Zeigen Sie, dass eine Sprache genau dann geordnet aufzählbar ist, wenn sie entscheidbar ist. Sie können voraussetzen, dass Σ^* geordnet aufzählbar ist.

53. (a) Seien X und R Sprachen. R sei regulär und es gelte $X \leq R$. Ist X ebenfalls eine reguläre Sprache? Begründen Sie Ihre Antwort. **4 Punkte**

    (b) Zeigen Sie, dass die Reduktion $\leq$ transitiv ist.

B. Mündliche Aufgaben

54. Die Länge $l(\alpha)$ von Anweisungen α eines LOOP-Programms sei induktiv wie folgt definiert:

$$l(\alpha) := \begin{cases} 1 & \text{falls } \alpha \in \mathcal{W} \\ l(\alpha_1) + l(\alpha_2) & \text{falls } \alpha = \alpha_1; \alpha_2 \\ l(\alpha_1) + 1 & \text{falls } \alpha = \underline{\text{loop}}\ X_i\ (\alpha_1). \end{cases}$$

    Falls α Anweisungsteil eines LOOP-Programms P ist, so wird die Länge von P festgelegt durch: $l(P) := l(\alpha)$.

    Die Funktion $bb : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ („Busy Beaver“-Funktion) sei definiert durch

$$bb(n) = max\{[\![P]\!](0) \mid l(P) \leq n + 1\}.$$

    (a) Begründen Sie, warum die Funktion bb total und intuitiv berechenbar ist.

    (b) Zeigen Sie, dass die Funktion bb streng monoton ist.

    (c) Zeigen Sie, dass bb nicht LOOP-berechenbar ist.

55. Zeigen Sie, dass mit $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ auch $L_1 \cup L_2, L_1 \cap L_2$ und $\Sigma^* \setminus L_1$ entscheidbar sind.

    Gilt dies auch für semi-entscheidbare Sprachen?

Bitte wenden!

C. Mündliche Zusatz-Aufgaben

56. Entscheiden Sie mit Beweis, ob die folgenden Mengen entscheidbar oder semi-entscheidbar sind.

    (a) Die Menge aller Tupel $(code(\mathfrak{A}), w, s)$, für die $\mathfrak{A}$ bei Eingabe von w nach maximal s Schritten anhält.

    (b) Die Menge aller Turingmaschinen, die monotone Funktionen $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ berechnen. Eine Funktion heißt monoton, falls für alle $x, y \in \mathbf{Def}(f)$ gilt:
    $$|x| \leq |y| \Rightarrow |f(x)| \leq |f(y)|.$$

57. Postsches Korrespondenzproblem (PCP)

    (a) Finden Sie Indizes $i_1 \dots i_n$, so dass für die folgende Instanz des PCP gilt:
    $x_{i_1} \dots x_{i_n} = y_{i_1} \dots y_{i_n}$ mit $(x_{i_j}, y_{i_j}) \in K$.
    $$K = \{(01, 0101), (1, 0), (010, 1), (00, 0)\}$$

    (b) Zeigen Sie, dass das PCP für $|\Sigma| = 1$ entscheidbar ist.

58. Zeigen Sie, dass die Mehrdeutigkeit kontextfreier Grammatiken nicht entscheidbar ist.

    Hinweis: Zeigen Sie, dass man jedem PCP eine kontextfreie Grammatik zuordnen kann, die genau dann mehrdeutig ist, wenn das PCP eine Lösung besitzt.