PHILIPPS-UNIVERSITÄT MARBURG
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. R. Loogen

D-35032 Marburg
Hans Meerwein Straße
Lahnberge

Übungen zur „Theoretischen Informatik“, Sommersemester 2007

Nr. 12 (letztes Blatt in der Wertung),
Abgabe: Dienstag, 10. Juli 2007 vor der Vorlesung

In den folgenden Aufgaben können Sie voraussetzen, dass die Addition, Subtraktion, Multiplikation, Vorgängerfunktion und mehrstelligen Nullkonstanten primitiv rekursiv sind.

37. Primitive Rekursion **3 Punkte**

Zeigen Sie, dass folgende Funktionen primitiv rekursiv sind:

(a) Signumfunktion: / 1

$$sg : \begin{cases} \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{falls } n = 0 \\ 1 & \text{falls } n > 0 \end{cases} \end{cases}$$

(b) Fallunterscheidung: / 2

Seien $m, n \geq 1, f_1, \ldots, f_m : \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$ und $g_1, \ldots, g_m : \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$ primitiv rekursiv. Es gelte ferner, dass für jedes $\bar{x} \in \mathbb{N}^n$ genau ein $i \in \{1, \ldots, m\}$ existiert mit $g_i(\bar{x}) = 0$.

Dann sei $f : \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$ die durch Fallunterscheidung für $\bar{x} \in \mathbb{N}^n$ wie folgt definierte Funktion

$$f(\bar{x}) := \begin{cases} f_1(\bar{x}) & \text{falls } g_1(\bar{x}) = 0 \\ \vdots & \vdots \\ f_m(\bar{x}) & \text{falls } g_m(\bar{x}) = 0 \end{cases}$$

38. μ-rekursive Funktionen **4 Punkte**

Zeigen Sie, dass die partielle arithmetische Division $div : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \dashrightarrow \mathbb{N}$ mit

$$div(x, y) = \begin{cases} n & \text{falls } n \text{ minimal mit } n * y \leq x < (n+1) * y \\ \text{nicht definiert} & \text{sonst} \end{cases}$$

μ-rekursiv ist.

39. Graph einer Funktion **5 Punkte**

Zu partiellem $f : \Sigma^* \dashrightarrow \Sigma^*$ sei $Graph(f) := \{v\$w \mid f(v) = w\}$, wobei $\$ \notin \Sigma$.

Beweisen Sie:

(a) f ist genau dann berechenbar, wenn $Graph(f)$ rekursiv aufzählbar ist. / 3

(b) Falls f total ist, gilt: / 2

f ist genau dann berechenbar, wenn $Graph(f)$ entscheidbar ist.