PHILIPPS-UNIVERSITÄT MARBURG
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. R. Loogen

D-35032 Marburg
Hans Meerwein Straße
Lahnberge

Übungen zur „Praktischen Informatik III“, WS 2005/06

Nr. 11, Abgabe: 24. Januar 2006 vor der Vorlesung

λ-Kalkül

A. Hausaufgaben

48. Normalformen und β-Äquivalenzen **6 Punkte**

Es seien

$$\begin{array}{lcl} I & = & \lambda\, x.\, x \\ K & = & \lambda\, x\, y.\, x \\ S & = & \lambda\, x\, y\, z.\, x\, z\, (y\, z) \\ B & = & \lambda\, x\, y\, z.\, x\, (y\, z) \\ C & = & \lambda\, x\, y\, z.\, x\, z\, y \end{array}$$

(a) Bestimmen Sie die Normalformen der folgenden Ausdrücke:

i. $I\ I$
ii. $K\ K\ K$
iii. $S\ S\ S\ S$
iv. $S\ (S\ S)$

(b) Beweisen oder widerlegen Sie:

i. $S\ (K\ S)\ K \Leftrightarrow_\beta^* B$
ii. $B\ (B\ I)\ (B\ K\ I) \Leftrightarrow_\beta^* C\ I$

49. Church-Zahlen **6 Punkte**

Es sei $\lceil n \rceil := \lambda f.\lambda x.f^n\, x$ für $n \in \mathbb{N}$.

(a) Geben Sie geschlossene λ-Ausdrücke für die folgenden arithmetischen Operationen auf Church-Zahlen an (mit Begründung):

i. $\mathit{Add}\ \lceil n \rceil\ \lceil m \rceil \Rightarrow_\beta^* \lceil n + m \rceil$
ii. $\mathit{Mult}\ \lceil n \rceil\ \lceil m \rceil \Rightarrow_\beta^* \lceil n * m \rceil$

(b) Welche arithmetischen Operationen werden durch die folgenden λ-Ausdrücke definiert:

i. $\lambda\, n\, m\, f\, x.\, m\, n\, f\, x$
ii. $\lambda\, n\, f\, x.\, n\, (\lambda\, y\, z.\, z\, (y\, f))\, (K\, x)\, I$

B. Mündliche Aufgaben

50. Fixpunktkombinatoren

(a) Zeigen Sie, dass für den Turingschen Fixpunktkombinator

$$\Theta = (\lambda\ x\ y.y\ (x\ x\ y))\ (\lambda\ x\ y.y\ (x\ x\ y))$$

gilt: $\Theta\ E \Rightarrow_\beta^* E\ (\Theta\ E)$ für beliebige λ-Ausdrücke E.

(b) Zeigen Sie, dass F mit der folgenden Definition ein Fixpunktkombinator ist, d.h. dass $F\ E \Leftrightarrow_\beta^* E\ (F\ E)$ für beliebige λ-Ausdrücke E.

$$\begin{aligned} &F = G^{26} \\ &G = \lambda a\,b\,c\,d\,e\,f\,g\,h\,i\,j\,k\,l\,m\,n\,o\,p\,q\,s\,t\,u\,v\,w\,x\,y\,z\,r. \\ &\qquad\qquad r\,(d\,a\,s\,i\,s\,t\,e\,i\,n\,f\,i\,x\,p\,u\,n\,k\,t\,k\,o\,m\,b\,i\,n\,a\,t\,o\,r) \end{aligned}$$

51. Kombinatorabstraktion

Ein *Kombinatorausdruck* ist ein Ausdruck, der nur mittels Applikation aus den Kombinatoren S, K und I aufgebaut ist.

$$\begin{array}{lcl} S & = & \lambda\ x\ y\ z.\ x\ z\ (y\ z) \\ K & = & \lambda\ x\ y.\ x \\ I & = & \lambda\ x.\ x \end{array}$$

$KExp$ bezeichne die Menge aller Kombinatorausdrücke.

(a) Definieren Sie eine Funktion

$$\mathit{trans} : \{e \in \mathit{Exp} \mid \mathit{free}(e) = \emptyset\} \to \mathit{KExp},$$

die geschlossene λ-Ausdrücke in äquivalente Kombinatorausdrücke übersetzt. Ein formaler Beweis der Äquivalenz ist nicht erforderlich.

Hinweis: Verwenden Sie die folgenden Äquivalenzen, um λ-Abstraktionen geeignet zu ersetzen.

$$\begin{array}{lcll} \lambda x.\ x & \Leftrightarrow_\beta^* & I & \\ \lambda x.\ e & \Leftrightarrow_\beta^* & K\ e & \text{falls } x \notin \mathit{free}(e) \\ \lambda x.\ e_1\ e_2 & \Leftrightarrow_\beta^* & S\ (\lambda x.\ e_1)\ (\lambda x.\ e_2) & \end{array}$$

(b) Bestimmen Sie mit Ihrer Übersetzungsfunktion einen Kombinatorausdruck zu dem Ausdruck $A = \lambda\ x\ y.y\ x$ und zeigen Sie, dass dieser zu A äquivalent ist.