

Übungen zur Algebra II

– Blatt 1 –

Abgabe: Dienstag, den 22.04.2014, 12:00 - 12:15 Uhr, Lahnberge SR X

Aufgabe 1 (4 Punkte)

- a) Sei H ein Integritätsring und $H[X]$ ein Hauptidealring. Zeige, dass H ein Körper ist.
- b) Zeige, dass in $\mathbb{Z}[X]$ das Ideal

$$\mathcal{I} := \{f \in \mathbb{Z}[X] : f(0) \text{ gerade}\}$$

kein Hauptideal ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Zeige, dass das Polynom $X^2 - 1$ über $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ vier verschiedene Wurzeln in $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ hat. Bestimme diese Wurzeln.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Für $n \geq 1$ hat das Polynom $X^n - 1$ über $\mathbb{Q}$ die eindeutige Faktorisierung

$$X^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(X)$$

über alle Teiler d von n , wobei $\Phi_d(X) \in \mathbb{Z}[X]$ das d -te Kreisteilungs-Polynom ist. Wegen $\Phi_1(X) = X - 1$ können wir auch

$$\frac{X^n - 1}{X - 1} = 1 + X + X^2 + \dots + X^{n-1} = \prod_{1 \neq d|n} \Phi_d(X)$$

schreiben. Später wird gezeigt, dass $\Phi_d(X)$ irreduzibel ist. Unter dieser Annahme bestimme man die eindeutige Faktorisierung von $X^n - 1$ über $\mathbb{Q}$ für alle $2 \leq n \leq 10$ durch explizite Bestimmung von $\Phi_d(X)$ für $2 \leq d \leq 10$. Verifiziere, dass die Koeffizienten von $\Phi_d(X)$ in diesen Fällen stets nur $1, 0, -1$ sind. Bemerkung: Issai Schur hat diese Aufgabe bis zum Grad $n = 105$ explizit durchgerechnet. Bei $n = 105$ tritt zum erstenmal ein Koeffizient $\neq 1, 0, -1$ auf.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ die kanonische Projektion. Betrachte $\Phi_{12}(X) = X^4 - X^2 + 1 \in \mathbb{Z}[X]$. Zeige:

- a) Für $p = 11$ zerfällt Φ_{12} über $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ in zwei (irreduzible) Faktoren.
- b) Für $p = 13$ zerfällt Φ_{12} über $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$ in vier verschiedene Linear-Faktoren.