Übungen zur Algebra II

– Blatt 10 –

Abgabe: Dienstag, den 08.07.2014, 12:00 - 12:15 Uhr, Lahnberge SR X

Wir betrachten Körpererweiterungen der Form $K \subset E \subset K(t)$, für eine Unbestimmte t, sodass $K(t) : E < \infty$ gilt. In der Vorlesung wird gezeigt, dass die Galoisgruppe von $K(t)$ über K mit der Möbius-Gruppe

$$PSL(2, K) = \{t \mapsto \frac{at+b}{ct+d} : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in K^{2\times 2} : ad - bc = 1\}/\pm 1$$

identifiziert werden kann, wobei der Automorphismus $\sigma \in PSL(2, K)$ durch den Wert $\sigma(t) = \frac{at+b}{ct+d}$ eindeutig bestimmt ist. Daher ist E der Fixkörper einer endlichen Untergruppe $G \subset PSL(2, K)$. Für $K = \mathbf{C}$ sollen diese Gruppen klassifiziert werden (ADE-Klassifizierung). Sei im folgenden $G \subset PSL(2, \mathbf{C})$ eine endliche Untergruppe der Ordnung $n = |G| > 1$.

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Zeige, dass G konjugiert zu einer Untergruppe der speziellen unitären Gruppe $PSU(2)$ ist. Hinweis: Zeige, dass G ein hermitesches Skalarprodukt auf $\mathbf{C}^2$ invariant lässt (Mittelung) und benutze, dass alle Skalarprodukte auf $\mathbf{C}^2$ äquivalent sind.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $X \subset \mathbf{C}^{2\times 2}$ der reelle Vektorraum aller hermiteschen 2×2-Matrizen über $\mathbf{C}$ mit Spur 0. Dann ist $(x|y) := tr(xy)$ ein (euklidisches) Skalarprodukt auf X.

a) Zeige, dass $\dim_{\mathbf{R}} X = 3$
b) Zeige, dass durch $(g, x) \mapsto \pi(g)x := gxg^* = gxg^{-1}$ für $x \in X$, $g \in SU(2)$, eine lineare Operation von $SU(2)$ auf X definiert wird, welche das Skalarprodukt erhält, also eine orthogonale Transformation darstellt.
c) Zeige, dass $\det \pi(g) = 1$, d.h. $\pi(g) \in SO(3)$. Hinweis: Es darf benutzt werden, dass $SU(2)$ zusammenhängend ist.
d) Zeige, dass der Homomorphismus $\pi : SU(2) \to SO(3)$ den Kern $\pm id$ besitzt, also eine Einbettung $PSU(2) \subset SO(3)$ induziert (dies ist sogar ein Isomorphismus).

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Nach Aufgabe 10.1 und 10.2 kann G als Untergruppe der Rotationsgruppe $SO(3)$ aufgefasst werden. Sei $\mathbf{S}^2 \subset \mathbf{R}^3$ die Einheitssphäre. Für $p \in \mathbf{S}^2$ sei $G_p := \{g \in G : gp = p\}$ die Isotropiegruppe und $G(p) = \{gp : g \in G\} \approx G/G_p$ die Bahn. Setze $P = \{p \in \mathbf{S}^2 : G_p \neq e\}$. Geometrisch bedeutet dies, dass für ein nicht-triviales $g \in G$ die Rotationsachse durch $\pm p$ geht.

a) Zeige, dass P eine endliche Menge ist
b) Zeige, dass G auf P operiert, d.h. für alle $g \in G$, $p \in P$ gilt $gp \in P$ und $|G_{gp}| = |G_p|$.
c) Zeige, dass für $p \in P$ auch $-p \in P$ gilt und die Isotropiegruppen gleich sind. Beachte: Dies bedeutet nicht, dass p und $-p$ in der gleichen Bahn liegen.

d) Beweise als disjunkte Vereinigung

$$G \setminus e = \dot{\bigcup_{\pm p}} (G_p \setminus e)$$

d.h. jedes nicht-triviale $g \in G$ besitzt genau eine Rotationsachse $\pm p$. Folgere

$$n - 1 = \frac{1}{2} \sum_{p \in P} (|G_p| - 1)$$

e) Zeige, dass für $p \in P$ die Isotropiegruppe G_p kommutativ, nämlich isomorph zu einer endlichen Untergruppe der Kreisgruppe $\mathbf{T}$ ist.

f) Zeige, dass für $p \in P$ die Ordnung $d_p := |G_p|$ ein Teiler von n ist und für die Bahn die Beziehung $|G(p)| = \frac{n}{d_p}$ gilt.

g) Beweise die Formel

$$n - 1 = \frac{1}{2} \sum_{p \in P/G} \frac{n}{d_p} (d_p - 1)$$

wobei die Summe über alle Bahnen von G in P läuft. Hinweis: Benutze

$$P = \dot{\bigcup_{p \in P/G}} G(p)$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Nach Voraussetzung gilt $d_p \geq 2$ für alle $p \in P$. Nach Aufgabe 10.3. gilt

$$2 - \frac{2}{n} = \sum_{p \in P/G} (1 - \frac{1}{d_p})$$

a) Beweise, dass die Anzahl $|P/G|$ der Bahnen nur 2 oder 3 sein kann.

b) Zeige, dass bei $|P/G| = 2$ die Beziehung

$$\frac{n}{d_1} + \frac{n}{d_2} = 2$$

gilt, was zu $d_1 = d_2 = n$ führt, d.h. zwei ein-punktige Bahnen mit jeweils einem Pol. Die zugehörige Gruppe ist die zyklische Gruppe A_n, erzeugt von der Rotation $\frac{2\pi}{n}$ um dieses Pol-Paar.

c) Sei nun $|P/G| = 3$. Zeige zunächst, dass von d_1, d_2, d_3 ein $d_i = 2$ sein muss.

d) Wähle $d_1 = 2$. Beweise dann die Relation

$$(d_2 - 2)(d_3 - 2) = 4(1 - \frac{d_2 d_3}{n}) < 4$$

e) Argumentiere, dass nur die folgenden Fälle auftreten können

$$d_2 = 2, d_3 = \frac{n}{2},\ n \text{ gerade: Diedergruppe } D_n$$
$$d_2 = 3, d_3 = 3, n = 12\text{: Tetraeder-Gruppe } E_6$$
$$d_2 = 3, d_3 = 4, n = 24\text{: Würfel/Octaeder-Gruppe } E_7$$
$$d_2 = 3, d_3 = 5, n = 60\text{: Dodecaeder/Icosaeder-Gruppe } E_8$$