Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. H. Upmeier
M.Sc. Philipp Naumann

Sommersemester 2014

Übungen zur Algebra II

– Bonusblatt –

Abgabe: Dienstag, den 15.07.2014, 12:00 - 12:15 Uhr, Lahnberge SR X

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei $\mathbb{Q} \subset F = \mathbb{Q}(\mathbb{C}_{17}^\times)$ der 17-te Kreisteilungskörper, d.h. der Zerfälllungskörper von $f(X) = X^{17} - 1$

a) Zeige, dass $f(X)$ nur einfache Nullstellen hat.

b) Bestimme das Kreisteilungspolynom $\Phi_{17}(X)$.

c) Bestimme den Grad $[F : \mathbb{Q}] =$ grad $\Phi_{17}(X)$.

d) Sei $\rho : Gal_{\mathbb{Q}}(F) \to \mathcal{S}_{17}$ der Einschränkungshomomorphismus auf die Menge der Wurzeln. Zeige, dass ρ in die Automorphismen-Gruppe $Aut(\mathbb{C}_{17}^\times)$ der Gruppe $\mathbb{C}_{17}^\times$ abbildet.

e) Zeige, dass die zyklische Gruppe $\mathbb{C}_{17}^\times$ die Automorphismen-Gruppe $Aut(\mathbb{C}_{17}^\times) \approx (\mathbb{Z}/17)^\times$ (Einheitengruppe) besitzt.

f) Bestimme die Ordnung von $(\mathbb{Z}/17)^\times$ und zeige, dass $(\mathbb{Z}/17)^\times$ zyklisch ist. Bestimme explizit einen Erzeuger von $(\mathbb{Z}/17)^\times$.

g) Zeige, dass $\rho : Gal_{\mathbb{Q}}(F) \to Aut(\mathbb{C}_{17}^\times) \approx (\mathbb{Z}/17)^\times$ ein Isomorphismus ist und bestimme einen Erzeuger $\eta \in Gal_{\mathbb{Q}}(F)$ und seine Wirkung auf eine primitive 17-te Einheitswurzel ζ.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei weiterhin $F = \mathbb{Q}(\mathbb{C}_{17}^\times)$.

a) Bestimme eine Kette

$$1 = G_4 \subset G_3 \subset G_2 \subset G_1 \subset G_0 = Gal_{\mathbb{Q}}(F)$$

zyklischer Untergruppen von $Gal_{\mathbb{Q}}(F)$ durch Angabe der jeweiligen Erzeuger. Was ist die Ordnung von G_i?

b) Sei

$$\mathbb{Q} = K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset K_3 \subset K_4 = F$$

die zugehörige Kette von Unterkörpern $K_i = Fix_{G_i}F$. Bestimme den Grad $[K_{i+1} : K_i]$.

c) Zeige, dass diese Kette von der Form

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(x) \subset \mathbb{Q}(x,y) \subset \mathbb{Q}(x,y,z) \subset F$$

ist, wobei

$$x = \sum_{i=1}^{8} \eta^{2i}\zeta,\ y = \sum_{i=1}^{4} \eta^{4i}\zeta,\ z = \sum_{i=1}^{2} \eta^{8i}\zeta$$

ist. Schreibe diese Elemente direkt als Potenzen von ζ.

d) Bestimme die jeweiligen Minimalpolynome von x über $\mathbb{Q}$, von y über $\mathbb{Q}(x)$ und von z über $\mathbb{Q}(x,y)$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $K = \mathbb{F}_q$ ein endlicher Körper. Die Galoisgruppe G von $K(t)$ über K besteht aus den Transformationen $t \mapsto \frac{at+b}{ct+d}$ mit $a,b,c,d \in K$ und $ad - bc \neq 0$ modulo der Untergruppe

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix}$$

für $\lambda \in K^\times$.

a) Zeige, dass die (endliche) Gruppe G die Ordnung $|G| = q^3 - q$ hat.

b) Zeige, dass der Fixkörper $E \subset K(t)$ von G die Form $E = K(x)$ besitzt, wobei

$$x = \frac{(t^{q^2} - t)^{1+q}}{(t^q - t)^{1+q^2}}$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei weiterhin $K = \mathbb{F}_q$ und $G = Gal_K K(t)$.

a) Zeige, dass die affinen Transformationen $t \mapsto at + b$ mit $a \in K^\times$ und $b \in K$ eine Untergruppe G_1 von G bilden. Bestimme die Ordnung $|G_1|$.

b) Zeige, dass der Fixkörper $E_1 \subset K(t)$ von G_1 die Form $E_1 = K(y)$ besitzt, wobei

$$y = (t^q - t)^{q-1}.$$

Bestimme den Grad $[E_1 : E]$.

c) Zeige, dass die Translationen $t \mapsto t + b$ mit $b \in K$ eine Untergruppe G_2 von G bilden. Bestimme die Ordnung $|G_2|$.

d) Zeige, dass der Fixkörper $E_2 \subset K(t)$ von G_2 die Form $E_2 = K(z)$ besitzt, wobei

$$z = t^q - t.$$

Bestimme den Grad $[E_2 : E_1]$ und $[E_2 : E]$.

e) Verifiziere die Inklusionen $E = K(x) \subset E_1 = K(y) \subset E_2 = K(z)$ indem y als rationale Funktion von x und z als rationale Funktion von y ausgedrückt wird.