Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. H. Upmeier
M.Sc. Philipp Naumann

Sommersemester 2014

Übungen zur Algebra II

– Blatt 3 –

Abgabe: Dienstag, den 06.05.2014, 12:00 - 12:15 Uhr, Lahnberge SR X

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei $K \subset E$ eine Körpererweiterung und $\alpha \in E$ algebraisch über K vom Grad n mit dem Minimalpolynom

$$p(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0 \in K[X].$$

Zunächst ist $K[\alpha] \subset E$ nur ein Integritätsring. Mit dem Isomorphismus

$$K[X]/\left(p(X)\right) \cong K[\alpha]$$

folgt, dass $K[\alpha]$ schon ein Körper ist. Bestimme für ein $f(X) \in K[X]$ mit $f(\alpha) \neq 0$ das Inverse $1/f(\alpha) \in K[\alpha]$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei K ein Körper der Charakteristik $p > 0$. Seien $a, b \in K$. Man beweise:

a) Ist $a \neq 0$, dann gilt für $n, m \in \mathbb{Z}$: $na = ma \Leftrightarrow p | n - m$

b) $(a + b)^p = a^p + b^p$

c) Die Abbildung $\varphi : K \to K, x \mapsto x^p$ ist ein Homomorphismus.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Seien $K \subset L \subset M$ Körpererweiterungen. Man beweise den Gradsatz

$$[M : L][L : K] = [M : K]$$

Hinweis: Betrachte zunächst die Fälle $[M : L] = \infty$ oder $[L : K] = \infty$.
Für $[M : L] = l < \infty$ und $[L : K] = k < \infty$ wähle eine Basis $\alpha_1, \cdots, \alpha_l$ von M über K und eine Basis $\beta_1, \cdots, \beta_k$ von L über K und zeige, dass $\alpha_\lambda\beta_\mu$, $1 \leqslant \lambda \leqslant l$, $1 \leqslant \mu \leqslant k$ eine Basis von M über K ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei K ein Körper. Im Polynomring $K[X]$ sei $f(X)$ ein irreduzibles Polynom.

a) Zeige: $K[X]/\left(f(X)\right)$ ist ein Körper.

b) Seien in a) K ein endlicher Körper mit q Elementen und f ein irreduzibles Polynom vom Grad n. Wieviele Elemente enthält der Körper $K[X]/\left(f(X)\right)$?

c) Bestimme in $\mathbb{Z}_2[X]$ alle irreduziblen Polynome vom Grad $\leqslant 2$.

d) Konstruiere mit b) einen Körper mit 4 Elementen und gebe die Verknüpfungstafeln an.