Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. H. Upmeier
M.Sc. Philipp Naumann

Sommersemester 2014

Übungen zur Algebra II

– Blatt 4 –

Abgabe: Dienstag, den 13.05.2014, 12:00 - 12:15 Uhr, Lahnberge SR X

Sei E eine Menge und $\mathcal{F}(E)$ die Menge aller endlichen Teilmengen $X \subset E$. Eine Relation $\beta \vdash X$ auf $E \times \mathcal{F}(E)$ heisst Abhängigkeitsrelation, falls die folgenden drei Axiome erfüllt sind:

(A1) Aus $\beta \in X$ folgt $\beta \vdash X$.

(A2) Aus $\beta \vdash X$ und $\alpha \vdash Y$ für alle $\alpha \in X$ folgt $\beta \vdash Y$.

(A3) Falls $\beta \vdash X$ und $\beta \nvdash X \setminus \alpha$ für ein $\alpha \in X$, dann gilt $\alpha \vdash (X \setminus \alpha) \cup \{\beta\}$.

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei E ein K-Vektorraum. Für $\beta \in E$ und eine endliche Teilmenge $X \subset E$ gelte $\beta \vdash X$ genau dann, wenn β von X linear abhängig ist, d.h. β liegt in der linearen Hülle der Menge $X \subset E$. Zeige, dass für diese Relation die Axiome (A1)-(A3) erfüllt sind.

Sei im folgenden $K \subset E$ eine Körpererweiterung. Für $\beta \in E$ und eine endliche Teilmenge $X = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\} \subset E$ gelte $\beta \vdash X$ genau dann, wenn β algebraisch über dem Körper $K(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \subset E$ ist, d.h. β liegt in der algebraischen Hülle von $K(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Schreibe die Relation $\beta \vdash X$, die zunächst mittels rationaler Funktionen ausgedrückt ist, explizit mittels einer geeigneten Polynomgleichung (in mehreren Variablen). Konkret zeige man: β ist algebraisch über $K(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ genau dann, falls ein $n \in \mathbb{N}$ und Polynome $p_i(X_1, \ldots, X_m) \in K[X_1, \ldots; X_m]$ für $1 \leqslant i \leqslant n$ existieren, so dass

$$\sum_{i=0}^{n} p_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)\beta^i = 0$$

gilt und nicht alle $p_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ gleich Null sind. Dazu zeige man zunächst als Vorüberlegung induktiv, dass ein Element $\alpha \in K(\alpha_1, \cdots, \alpha_m)$ in der Form

$$\frac{p(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)}{q(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)}$$

geschrieben werden kann, wobei $p(X_1, \ldots, X_m)$ und $q(X_1, \ldots, X_m)$ Polynome in $K[X_1, \ldots, X_m]$ sind. Zeige, dass für diese Relation das Axiom (A1) (trivialerweise) erfüllt ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Zeige, dass auch das Axiom (A2) erfüllt ist. Hinweis: Konstruiere geeignete Körpererweiterungs-Türme mit jeweils einem Element adjungiert und wende die Gradformel an.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Zeige, dass auch das Austausch-Axiom (A3) erfüllt ist. Hinweis: Sei $\alpha = \alpha_1$. Schreibe eine Polynomrelation

$$a_0 + a_1\,\beta + a_2\,\beta^2 + \cdots + a_n\,\beta^n = 0$$

mit $a_0, \ldots, a_n \in K(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$, $a_n \neq 0$ in der Form

$$b_0 + b_1\,\alpha_1 + b_2\,\alpha_1^2 + \cdots + b_k\,\alpha_1^k = 0$$

mit $b_0, \ldots, b_k \in K(\beta, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$. Dann ist zu zeigen, dass dieses Polynom nicht identisch null ist, d.h. $b_0, \ldots, b_k$ sind nicht alle Null sind.
Bemerkung: Mit diesen Hilfsmitteln kann man die klassischen Sätze der Linearen Algebra (Existenz einer Basis, Austauschsatz von Steinitz usw.) auch im Kontext von Körpererweiterungen beweisen.