Übungen zur Algebra II

– Blatt 6 –

Abgabe: Dienstag, den 27.05.2014, 12:00 - 12:15 Uhr, Lahnberge SR X

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Ein Polynom $f(X) \in K[X]$ heißt separabel, falls es nur einfache Nullstellen (in einer geeigneten Körpererweiterung E) besitzt. Sei $f'(X) \in K[X]$ die formale Ableitung.

- Zeige, dass f separabel ist, falls $f' \neq 0$ und f, f' in $K[X]$ teilerfremd sind. Hinweis: Der ggT wird in $K[X]$ gebildet, die Nullstellen liegen aber in E . Um von K nach E zu gelangen, muss eine wichtige Eigenschaft des ggT benutzt werden.
- Sei $f \in K[X]$ irreduzibel und es gelte $f' \neq 0$. Zeige, dass f separabel ist.
- Sei $f \in K[X]$ irreduzibel über einem Körper der Charakteristik 0. Zeige, dass f separabel ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei K ein Körper der Charakteristik $p \neq 0$.

- Zeige, dass jedes Polynom der Form $f(X) = g(X^p)$ für ein $g \in K[X]$ die formale Ableitung $f'(X) = 0$ besitzt.
- Zeige umgekehrt, dass jedes Polynom

$$f(X) = \sum_i a_i X^i \in K[X]$$

mit $f'(X) = 0$ in der Form $f(X) = g(X^p)$ darstellbar ist. Hinweis: Alle Koeffizienten a_i , für welche i nicht durch p teilbar ist, verschwinden.

- Sei K ein Körper der Charakteristik p und $a \in K$. Das Polynom $f(X) = X^p - a \in K[X]$ sei reduzibel. Zeige, dass es ein $b \in K$ gibt, sodass $f(X) = (X - b)^p$ die p -te Potenz eines Linearfaktors ist. Hinweis: Wähle eine Wurzel $f(b) = 0$ in einem Erweiterungskörper und zeige, dass b bereits zu K gehört.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Ein Körper K der Charakteristik p heißt *perfekt*, falls jedes $b \in K$ als p -te Potenz $b = a^p$ für ein $a \in K$ darstellbar ist. Bemerkung: Jeder endliche Körper mit p^n Elementen ist perfekt, dort gilt sogar $a = a^{p^n} = (a^{p^{n-1}})^p$. Zeige für jeden perfekten Körper K der Charakteristik p :

- Jedes Polynom $f \in K[X]$ mit $f'(X) = 0$ ist als p -te Potenz $f(X) = h(X)^p$ für ein $h(X) \in K[X]$ darstellbar.

- b) Jedes irreduzible Polynom $f \in K[X]$ ist separabel. Bemerkung: Dies gilt also für jeden endlichen Körper.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei E eine endliche Körpererweiterung eines perfekten Körpers K der Charakteristik p . Beweise die folgenden Aussagen:

- a) Für jedes $j \geq 1$ ist die Menge E^{p^j} aller p^j -ten Potenzen von Elementen in E ein Teilkörper von E , welcher K enthält.
- b) Die absteigende Folge $(E^{p^j})_{j \geq 1}$ wird stationär, d.h. es existiert $i \geq 1$ sodass

$$E^{p^i} = \bigcap_{j \geq i} E^{p^j}.$$

- c) E^{p^i} ist ein perfekter Körper.
- d) Falls $E^{p^i} = K$, so gilt $E = K$.
- e) E ist perfekt. Hinweis: Induktion über $[E : K]$.
- f) Zeige allgemeiner: Jede algebraische Körpererweiterung E eines perfekten Körpers K ist perfekt.