Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. H. Upmeier
M.Sc. Philipp Naumann

Sommersemester 2014

Übungen zur Algebra II

– Blatt 7 –

Abgabe: Dienstag, den 03.06.2014, 12:00 - 12:15 Uhr, Lahnberge SR X

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei $K \subset F$ eine Körpererweiterung mit Zwischenkörpern $K \subset E_i \subset F$ für $i = 1, 2$, sodass $K \subset E_i$ normal ist. Beweise:

a) Das Kompositum $E_1 \vee E_2 \subset F$ ist normal über K.

b) Der Durchschnitt $E_1 \cap E_2 \subset F$ ist normal über K.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei α eine Nullstelle von $X^4 - 2 = 0$ über $\mathbb{Q}$. Zeige, dass $\mathbb{Q}(\alpha)$ nicht normal über $\mathbb{Q}$ ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $\phi : K \to E$ eine Körpererweiterung. Beweise die folgenden Aussagen:

a) Für jedes $\sigma \in Gal_K(E)$ und $f \in K[X]$ mit Bild $f_\phi \in E[X]$ gilt

$$\sigma(f_\phi^{-1}(0)) = f_\phi^{-1}(0).$$

b) Ist E ein Zerfällungskörper von f, so existiert ein injektiver Homomorphismus

$$Gal_K(E) \to \mathcal{S}_k$$

in die symmetrische Gruppe, wobei k die Anzahl der (verschiedenen) Nullstellen von f in E sei. Hinweis: Zur Injektivität betrachte den Teilkörper

$$L := \{\alpha \in E : \sigma\alpha = \alpha\}.$$

c) Folgere eine (möglichst gute) Abschätzung der Anzahl $|Gal_K(E)|$ mit Hilfe von k.

d) Was ergibt sich für die drei Standardbeispiele (Kreisteilungspolynome, endliche Körper, allgemeine Gleichung k-ten Grades)?

Bitte wenden

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei $\phi : K \to E$ eine normale Körpererweiterung und $\iota : E \to F$ eine Körpererweiterung mit $\psi = \iota \circ \phi : K \to F$. Beweise die folgenden Aussagen:

a) Für jedes $\tau \in Gal_K(F)$ gilt $\tau(\iota(E)) = \iota(E)$. Hinweis: Betrachte den Teilkörper

$$L := \{\alpha \in E : \tau(\iota\alpha) \in \iota(E)\}$$

und zeige $L = E$ auf zweierlei Weise: (i) durch Betrachtung der Minimalpolynome von $\alpha \in E$ und (ii) (nur für den endlichen Fall) durch Realisierung von E als Zerfällungskörper eines Polynoms $f \in K[X]$. In beiden Fällen ist Aufgabe 3 a) hilfreich.

b) Die Restriktions-Abbildung

$$\rho : Gal_K(F) \to Gal_K(E),$$

definiert durch $\iota\rho(\tau) = \tau\iota$ für alle $\tau \in Gal_K(F)$ ist ein Homomorphismus.

c) Bestimme den Kern von ρ als Normalteiler in $Gal_K(F)$.