

Übungen zur Algebra II

– Blatt 8 –

Abgabe: Dienstag, den 17.06.2014, 12:00 - 12:15 Uhr, Lahnberge SR X

Die folgenden Aufgaben betreffen die algebraische Hülle eines Körpers K . Dabei geht es hauptsächlich um das sorgfältige Nachprüfen der einzelnen Schritte. In der Vorlesung wird gezeigt, dass ein Zerfällungskörper $K \rightarrow \bar{K}$ aller Polynome $f \in K[X]$ bereits algebraisch abgeschlossen ist, also eine algebraische Hülle von K darstellt.

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Eine partiell geordnete Menge $\mathcal{I}$ heisst *gerichtet*, falls für alle $\mu, \nu \in \mathcal{I}$ ein $\rho \in \mathcal{I}$ existiert, sodass $\mu \leq \rho$ und $\nu \leq \rho$ gilt. Sei $\mathcal{I}$ eine gerichtete Menge und $(E_\mu)_{\mu \in \mathcal{I}}$ eine Familie von Körpern. Für alle $\mu \leq \nu$ in $\mathcal{I}$ sei

$$\phi_\nu^\mu : E_\mu \rightarrow E_\nu$$

eine Körpererweiterung, sodass die *Verträglichkeitsrelationen* $\phi_\rho^\nu \phi_\nu^\mu = \phi_\rho^\mu$ für $\mu \leq \nu \leq \rho$ gelten, wobei $\phi_\mu^\mu = id$ gesetzt wird. Auf der disjunkten Vereinigung

$$E := \cup_{\mu \in \mathcal{I}} E_\mu$$

aller E_μ definiere eine Relation $\sim$ wie folgt: Für $a \in E_\mu$ und $b \in E_\nu$ gelte $a \sim b$, falls ein $\rho \geq \mu, \nu$ existiert sodass $\phi_\rho^\mu a = \phi_\rho^\nu b$. Zeige

- a) $a \sim b$ ist eine Äquivalenzrelation auf E .
- b) Die Menge E_∞ aller Äquivalenzklassen $[a]$ ist ein Körper mittels der Operationen

$$[a] * [b] := [\phi_\rho^\mu a * \phi_\rho^\nu b]$$

für $a \in E_\mu, b \in E_\nu$, wobei $\rho \geq \mu, \nu$ beliebig ist und $*$ die Addition, Multiplikation usw. in E_ρ bedeutet. Hinweis: Hier ist vieles nachzuweisen, insbesondere die Unabhängigkeit von der Wahl von ρ , sowie die Assoziativ- und Distributivgesetze mit jeweils drei Variablen.

- c) Für jedes $\mu \in \mathcal{I}$ existiert eine Körpererweiterung $\phi_\infty^\mu : E_\mu \rightarrow E_\infty$ sodass für $\mu \leq \nu$ die Verträglichkeitsrelation $\phi_\infty^\mu = \phi_\infty^\nu \phi_\nu^\mu$ gilt.

- d)

$$E_\infty = \bigvee_{\mu \in \mathcal{I}} \phi_\infty^\mu E_\mu$$

ist das Kompositum aller Körper E_μ .

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei K ein Körper und $(f_n)_{n \geq 0}$ eine Folge von Polynomen in $K[X]$ mit $f_0 = 1$. Definiere Körpererweiterungen $\phi_n^0 : K \rightarrow E_n$ und Homomorphismen

$$\phi_n^{n-1} : E_{n-1} \rightarrow E_n$$

induktiv wie folgt: $E_0 := K$ und E_n sei der Zerfällungskörper des Polynoms f_n , genauer $f_n|_{\phi_{n-1}^0} \in E_{n-1}[X]$. Dabei setze für $0 \leq m \leq n$

$$\phi_n^m := \phi_n^{n-1} \phi_{n-1}^{n-2} \cdots \phi_{m+1}^m : E_m \rightarrow E_n$$

- Realisiere $\phi_n^0 : K \rightarrow E_n$ und $\phi_n^m : E_m \rightarrow E_n$ für $m < n$ jeweils als Zerfällungskörper eines einzigen Polynoms in $K[X]$.
- Beweise die Verträglichkeitsrelation $\phi_p^n \phi_n^m = \phi_p^m$ für $m \leq n \leq p$.
- Zeige, dass die zugehörige Körpererweiterung $\phi_\infty^0 : K \rightarrow E_\infty$ der Zerfällungskörper aller f_n ist.
- Folgere, dass jeder abzählbare Körper K einen Zerfällungskörper $K \rightarrow \overline{K}$ aller Polynome $f \in K[X]$ besitzt.

Die Menge $\mathbb{N}^+$ aller natürlichen Zahlen $n \geq 1$ mit der Teilbarkeitsordnung ist gerichtet, aber nicht total-geordnet.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $\phi_n^1 : \mathbb{F}_q \rightarrow E_n \cong \mathbb{F}_{q^n}$ eine Körpererweiterung vom Grad n . Setze $E_1 := \mathbb{F}_q$.

- Realisiere $\phi_n^1 : \mathbb{F}_q \rightarrow E_n$ als Zerfällungskörper (i) eines elementaren Polynoms, (ii) einer endlichen Familie irreduzibler Polynome sowie (iii) eines einzigen irreduziblen Polynoms in $\mathbb{F}_q[X]$.
- Definiere für alle Teiler $m|n$ in $\mathbb{N}^+$ einen Homomorphismus

$$\phi_n^m : E_m \rightarrow E_n$$

über $\mathbb{F}_q$, mit $\phi_n^m \phi_m^1 = \phi_n^1$, sodass für $m|n|p$ die Verträglichkeitsrelation $\phi_p^n \phi_n^m = \phi_p^m$ erfüllt ist. Hinweis: Wähle für jedes n einen Erzeuger ζ_n von $E_n^\times$.

- Realisiere $\phi_n^m : E_m \rightarrow E_n$ als Zerfällungskörper (i) eines elementaren Polynoms bzw. (ii) einer endlichen Familie irreduzibler Polynome in $\mathbb{F}_q[X]$.
- Zeige, dass die zugehörige Körpererweiterung $\phi_\infty^1 : \mathbb{F}_q \rightarrow E_\infty =: \mathbb{F}_{q^\infty} = \overline{\mathbb{F}_q}$ der Zerfällungskörper von $\mathbb{F}_q[X]$ ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei $\phi_n^1 : \mathbb{Q} \rightarrow E_n := \mathbb{Q}(\mathbb{C}_n^\times)$ die n -te Kreisteilungserweiterung. Setze $E_1 := \mathbb{Q} = \mathbb{Q}(\mathbb{C}_1^\times)$.

- Realisiere $\phi_n^1 : \mathbb{Q} \rightarrow E_n$ als Zerfällungskörper (i) eines elementaren Polynoms, (ii) einer endlichen Familie irreduzibler Polynome sowie (iii) eines einzigen irreduziblen Polynoms in $\mathbb{Q}[X]$.
- Definiere für alle Teiler $m|n$ in $\mathbb{N}^+$ einen Homomorphismus

$$\phi_n^m : E_m \rightarrow E_n$$

über $\mathbb{Q}$, mit $\phi_n^m \phi_m^1 = \phi_n^1$, sodass für $m|n|p$ die Verträglichkeitsrelation $\phi_p^n \phi_n^m = \phi_p^m$ erfüllt ist. Hinweis: Wähle für jedes n eine primitive n -te Einheitswurzel ζ_n .

- Realisiere $\phi_n^m : E_m \rightarrow E_n$ als Zerfällungskörper (i) eines elementaren Polynoms bzw. (ii) einer endlichen Familie irreduzibler Polynome in $\mathbb{Q}[X]$.
- Zeige, dass die zugehörige Körpererweiterung $\phi_\infty^1 : \mathbb{Q} \rightarrow E_\infty = \mathbb{Q}(\mathbb{C}_\infty^\times) = \overline{\mathbb{Q}}^{ab}$ von allen Einheitswurzeln $\mathbb{C}_\infty^\times$ erzeugt wird. ($\overline{\mathbb{Q}}^{ab}$ führt zur Abelisierung der vollen Galoisgruppe von $\overline{\mathbb{Q}}$.)