Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. H. Upmeier
M.Sc. Philipp Naumann

Sommersemester 2013

Übungen zur Analysis III

– Blatt 1–

Abgabe: Montag, den 29.04.2013, 12:00 - 12:15 Uhr, HG Seminarraum +2/0100

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Definiere für eine Teilmenge $A \subset \mathbf{R}^n$ die Hülle $\overline{A}$ als Menge aller Limites konvergenter Folgen $a_n \in A$. Beweise mit dieser Definition

a)
$$\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B} \text{ mit } A \subset \mathbf{R}^p, B \subset \mathbf{R}^q.$$

b)
$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B} \text{ mit } A \subset \mathbf{R}^n, B \subset \mathbf{R}^n.$$

c) Beweise als Konsequenz die Randformel
$$\partial(A \times B) = (\partial(A) \times \overline{B}) \cup (\overline{A} \times \partial(B)).$$
Hinweis: In der Vorlesung war $(A \times B)^o = A^o \times B^o$ bewiesen worden.

d) Schreibe die Randformel für k Faktoren $A_1 \times \ldots \times A_k$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $P \subset \mathbf{R}^n$ ein Quader. Der Rand ∂P zerfällt disjunkt in offene Facetten, die jeweils offene Quader niederer Dimension sind, einschließlich 0-dimensionaler Punkte. Für $0 \leq k \leq n$ sei $\partial_k(P)$ die Vereinigung aller k-dimensionalen offenen Facetten. Insbesondere sei $\partial_n(P) = P^o$.

a) Wie viele Facetten enthält $\partial_k(P)$ für $0 \leq k \leq n$?

b) Wie viele Facetten gibt es insgesamt (einschließlich $k = n$)?

c) Bestimme die Hülle $\overline{\partial_k(P)}$ für $0 \leq k \leq n$? Wann ist $\partial_k(P)$ abgeschlossen?

d) Bestimme $\partial_k(P \times Q)$ für $P \subset \mathbf{R}^p$, $Q \subset \mathbf{R}^q$ und $0 \leq k \leq p + q$.

Bitte wenden

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei Γ die Gruppe aller linearen Transformationen in $GL_n(\mathbf{R})$, welche erzeugt wird durch Koordinaten-Permutationen

$$S_\pi(x_1, .., x_n)^T = (x_{\pi(1)}, .., x_{\pi(n)})^T,$$

Diagonal-Matrizen

$$D_\lambda(x_1, .., x_n)^T = (\lambda_1\, x_1, .., \lambda_n\, x_n)^T$$

mit $\lambda_i \neq 0$, sowie Rechts-Scherungen

$$R_{ij}(x_1, .., x_i, .., x_j, .., x_n)^T = (x_1, .., x_i + x_j, .., x_j, .., x_n)^T$$

bzw. Links-Scherungen

$$L_{ij}(x_1, .., x_i, .., x_j, .., x_n)^T = (x_1, .., x_i, .., x_i + x_j, .., x_n)^T$$

für $1 \leq i < j \leq n$.

a) Schreibe diese Transformationen in Matrix-Form.

b) Bestimme die Determinante dieser Matrizen.

c) Beweise, dass jede invertierbare obere Dreiecksmatrix als Produkt von Diagonalmatrizen und Rechts-Scherungen darstellbar ist. Analog für untere Dreiecksmatrizen. Wie viele Faktoren werden benötigt?

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Beweise, dass $\Gamma = GL_n(\mathbf{R})$ gilt, d.h. $GL_n(\mathbf{R})$ wird durch Permutationen, Diagonalmatrizen und Scherungen erzeugt. Beispielsweise nach folgendem Schema: Sei e_1 der erste Spalten-Einheitsvektor und ϵ_1 der erste Zeilen-Einheitsvektor.

a) Für $M \in GL_n(\mathbf{R})$ finde eine Permutationsmatrix P und eine invertierbare untere Dreiecksmatrix L mit $\tilde{M}\, e_1 = L\, e_1$, wobei $\tilde{M} = M\, P$. Finde analog eine invertierbare obere Dreiecksmatrix R mit $\epsilon_1\, R = \epsilon_1\, \tilde{M}$.

b) Was gilt für $R\, e_1$ bzw. $\epsilon_1\, L$?

c) Zeige, dass $N := L^{-1} \tilde{M}\, R^{-1}$ eine Diagonal-Blockmatrix vom Typ $(1, n-1)$ ist.

d) Beweise nun die Behauptung durch Induktion nach n .