Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. H. Upmeier
M. Sc. Philipp Naumann

Sommersemester 2013

Übungen zur Analysis III

– Blatt 7 –

Abgabe: Montag, den 24.06.2013, 12:00 - 12:15 Uhr, HG Seminarraum +2/0100

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei $U \subset \mathbf{R}^n$ eine offene Menge und $g : U \to \mathbf{R}^m$ eine diffbare Abbildung mit $m \leq n$, sodass die Jacobi-Matrix

$$dg(x) := (\frac{\partial g_j}{\partial x_i}(x))_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq m}$$

für alle $x \in U$ den maximalen Rang m hat. Dann heißt

$$M := \{x \in U : g(x) = const.\}$$

eine *Untermannigfaltigkeit* von U. Zeige, dass die folgenden Teilmengen des $\mathbf{R}^n$ jeweils Untermannigfaltigkeiten (für geeignetes U) sind:

a) Die Sphäre

$$\mathbf{S} := \{x \in \mathbf{R}^n : x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1\}$$

b) Das Produkt $M \times N$ von Untermannigfaltigkeiten $M \subset V \subset \mathbf{R}^p$ und $N \subset W \subset \mathbf{R}^q$ mit $p + q = n$

c) Der Graph

$$\mathcal{G}_f := \{(y, f(y)) : y \in V\}$$

einer Abbildung $f : V \to \mathbf{R}^m$, wobei $V \subset \mathbf{R}^{n-m}$ offen ist.

d) Affine Unterräume des $\mathbf{R}^n$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Für eine Untermannigfaltigkeit $M \subset U$ und $x \in M$ heißt

$$T_x(M) := \ker dg(x)$$

der *Tangentialraum* an M in x.

a) Bestimme die Dimension $\dim M$ des Tangentialraums

b) Bestimme die Tangentialräume sowie die Dimension für die Beispiele der vorigen Aufgabe

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $E := \mathbf{R}^n$ der Vektor-Spaltenraum. Für $k \geq 0$ betrachte k-multilineare Abbildungen $\lambda : E^k \to \mathbf{R}$. Sei $\mathcal{L}_a^k(E)$ der Vektorraum der alternierenden k-Linearformen.

a) Zeige, dass die Abbildungen

$$\lambda_I(v^1, .., v^k) := \det(v_i^j)_{i \in I : 1 \leq j \leq k} = \sum_{\pi \in \mathcal{S}_k} (-1)^\pi \prod_{j=1}^k v_{i_j}^{\pi_j}$$

für alle k-elementigen Teilmengen $I = \{1 \leq i_1 < ... < i_k \leq n\}$ eine Basis von $\mathcal{L}_a^k(E)$ bilden.

b) Bestimme die Dimension $\dim \mathcal{L}_a^k(E)$

c) Bestimme die erzeugende Funktion

$$\phi_a(t) := \sum_{k \geq 0} \dim \mathcal{L}_a^k(E) t^k$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Betrachte $n \times n$-Matrizen $A = (A_i^j)$ mit Zeilenindex i und Spaltenindex j. Für k-elementige Teilmengen $I, J \subset \{1, ..., n\}$ sei A_I^J die $k \times k$-Untermatrix mit Zeilenindices in I und Spaltenindices in J. Beweise die Formel

$$\det(AB)_I^K = \sum_J \det A_I^J \det B_J^K$$

für k-elementige Indexmengen I, J, K. Was ergibt sich für $k = 1$ bzw. $k = n$?