Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. G. Schumacher
M.Sc. Philipp Naumann

Wintersemester 2013/2014

Übungen zur Funktionentheorie II

– Blatt 1 –

Abgabe: Montag, den 28.10.2013, 12:00 -12:15 Uhr, Lahnberge SR IV

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei f eine nichtkonstante elliptische Funktion zum Gitter Ω und P das zugehörige Periodenparallelogramm. Wir bezeichen mit Ord f die Anzahl aller Polstellen auf P gemäß ihrer Vielfachheit. Ist $b \in \mathbb{C}$ eine feste Zahl, dann ist auch $g(z) = f(z) - b$ eine elliptische Funktion. Eine Nullstelle von g nennt man eine b-Stelle von f. Die 0-Stellenordnung von g nennt man auch die b-Stellenordnung von f. Wir bezeichnen sie mit

$$b\text{-Ord } f \; (= \text{ Anzahl der } b\text{-Stellen auf P mit Vielfachheit gerechnet}).$$

Ein Punkt $b \in \overline{\mathbb{C}}$ heißt Verzweigungspunkt (in Bezug auf f), falls es eine Stelle $a \in \mathbb{C}$ gibt, so dass a eine mehrfache (d.h. mindestens zweifache) b-Stelle ist. (Im Falle $b = \infty$ bedeute b-Stelle natürlich Pol.) Man beweise:

a) Ord $f = b$-Ord f für alle $b \in \mathbb{C}$

b) Es gibt nur endlich viele Verzweigungspunkte $b \in \overline{\mathbb{C}}$, also nur endlich viele Punkte a aus P, welche über einem Verzweigungspunkt liegen ($f(a) = b$). Für die Anzahl $\#f^{-1}(z)$ der Urbildpunkte eines beliebigen Punktes $z \in \overline{\mathbb{C}}$ gilt

$$0 < \#f^{-1}(z) \quad \begin{cases} < N, & \text{falls z ein Verzweigungspunkt ist,} \\ = N, & \text{falls z kein Verzweigungspunkt ist.} \end{cases}$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei f eine ganze Funktion und Ω ein Gitter in $\mathbb{C}$. Zu jedem Gitterpunkt $\omega \in \Omega$ existiere ein Polynom P_ω mit der Eigenschaft

$$f(z + \omega) = f(z) + P_\omega(z).$$

Man beweise, dass dann f selbst ein Polynom sein muss.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei f eine ganze Funktion und Ω ein Gitter in $\mathbb{C}$. Zu jedem Gitterpunkt $\omega \in \Omega$ existiere eine Zahl $C_\omega \in \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft

$$f(z + \omega) = C_\omega f(z).$$

Zeige, dass dann gilt

$$f(z) = Ce^{az}$$

mit geeigneten Konstanten C und a.
Anleitung: Man zeige, dass die Funktion f'/f konstant ist und verwende die Charakterisierung der Exponentialfunktion durch ihre Differentialgleichung.