Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. G. Schumacher
M.Sc. Philipp Naumann

Wintersemester 2013/2014

Übungen zur Funktionentheorie II

– Blatt 10 –

Abgabe: Montag, den 20.01.2013, 12:00 -12:15 Uhr, Lahnberge SR IV

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei $f : \mathbb{P}_1 \to \mathbb{P}_1$ die holomorphe Abbildung, welche durch die rationale Funtion $f(z) := z + 1/z$ definiert ist. Man bestimme die Verzweigungspunkte von f und zeige, dass biholomorphe Abbildungen $\varphi : \mathbb{P}_1 \to \mathbb{P}_1$ und $\psi : \mathbb{P}_1 \to \mathbb{P}_1$ existieren, so dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{P}_1 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f"'] & \mathbb{P}_1 \arrow[d, "p_2"] \\ \mathbb{P}_1 \arrow[r, "\psi"'] & \mathbb{P}_1 \end{tikzcd}$$

Hierbei ist $p_2 : \mathbb{P}_1 \to \mathbb{P}_1$ die Abbildung $z \mapsto z^2$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

a) Man zeige, dass die Tangensfunktion eine lokal-biholomorphe Abbildung $\tan : \mathbb{C} \to \mathbb{P}_1$ definiert.

b) Man beweise, dass $\tan(\mathbb{C}) = \mathbb{P}_1 \backslash \{\pm i\}$ gilt und $\tan : \mathbb{C} \to \mathbb{P}_1 \backslash \{\pm i\}$ eine Überlagerung ist.

c) Man zeige, dass biholomorphe Abbildungen

$$\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \quad \text{und} \quad \psi : \mathbb{C}^* \to \mathbb{P}_1 \setminus \{\pm i\}$$

existieren, so dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "exp"'] & \mathbb{C} \arrow[d, "\tan"] \\ \mathbb{C}^* \arrow[r, "\psi"'] & \mathbb{P}_1 \setminus \{\pm i\} \end{tikzcd}$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

a) Man beweise, dass sich die Differentialform $\omega := dz/\left(1 + z^2\right)$, welche auf $\mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$ holomorph ist, nach $\mathbb{P}_1 \setminus \{\pm i\}$ fortsetzen lässt.

b) Sei $p := \tan : \mathbb{C} \to \mathbb{P}_1 \setminus \{\pm i\}$ die Überlagerung aus Aufgabe 2. Man berechne $p^*\omega$.

Bitte wenden

Aufgabe 4 (4 Bonuspunkte)

Sei $F : X \to S$ eine nicht-konstante holomorphe Abbildung von Riemannschen Flächen, $b \in X$ ein Verzweigungspunkt mit Vielfachheit k und $a := F(b)$. Sei ω eine meromorphe 1-Form auf S. Man beweise:

$$Res_b(F^*\omega) = kRes_a(\omega).$$