Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. G. Schumacher
M.Sc. Philipp Naumann

Wintersemester 2013/2014

Übungen zur Funktionentheorie II

– Blatt 11 –

Abgabe: Montag, den 27.01.2013, 12:00 -12:15 Uhr, Lahnberge SR IV

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei X eine Riemannsche Fläche. Für $Y \subset X$ offen definieren wir die Konjugation conj: $\mathcal{E}^{(1)}(Y) \to \mathcal{E}^{(1)}(Y)$ wie folgt: Bezüglich einer lokalen Koordinatenumgebung (U, z) schreiben wir eine Differentialform ω in der Form $\omega = fdz + gd\overline{z}$. Dann setzen wir $\operatorname{conj}(\omega) := \overline{f}d\overline{z} + \overline{g}dz$. Man beweise:

a) Die Definition der Konjugation ist unabhängig von der lokalen Koordinate und die Abbildung conj daher wohldefiniert. Wir schreiben $\overline{\omega}$ für $\operatorname{conj}(\omega)$.

b) Es gelten die folgenen Formeln für $g \in \mathcal{E}(Y), \omega \in \mathcal{E}^{(1)}(Y)$:

$$\overline{dg} = d\overline{g}, \quad \overline{\partial g} = \overline{\partial}\overline{g}, \quad \overline{\overline{\partial} g} = \partial\overline{g}, \quad \overline{g\omega} = \overline{g}\,\overline{\omega}$$

c) Falls $c : [0,1] \to Y$ eine stetig differenzierbare Kurve ist und $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(Y)$, so gilt

$$\overline{\int_c \omega} = \int_c \overline{\omega}.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

a) Sei X eine Riemannsche Fläche und $U \subset X$ offen. Man zeige, dass eine Funktion $h \in \mathcal{E}(U)$ genau dann harmonisch ist, wenn die Differentialform ∂h holomorph ist.

b) Sei $h : X \to \mathbb{R}$ eine reelle harmonische Funktion. Man beweise, dass alle Perioden der Differentialform $\omega := \partial h \in \Omega(X)$ rein imaginär sind.

c) Für h und ω wie in b) zeige man, dass h genau dann der Realteil einer holomorphen Funktion $f : X \to \mathbb{C}$ ist, wenn alle Perioden von ω verschwinden.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

a) Man beweise, dass auf $\mathbb{P}_1$ jede holomorphe Differentialform vom Grad 1 identisch Null ist.

b) Sei $\Lambda \subset \mathbb{C}$ ein Gitter und $X = \mathbb{C}/\Lambda$ der zugehörige Torus. Man beweise mit Hilfe von Teil a), dass jede holomorphe Abbildung $F : \mathbb{P}_1 \to X$ konstant ist.

Bitte wenden

Aufgabe 4 (4 Bonuspunkte)

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $A \subset U$ eine kompakte Teilmenge mit glattem Rand ∂A. Dann gilt für jede Differentialform $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(U)$ der Stokes'sche Satz

$$\int\int_A d\omega = \int_{\partial A} \omega.$$

Hierbei ist der Rand so orientiert, dass die äußere Normale von A und der Tangentenvektor von ∂A in dieser Reihenfolge eine positiv orientierte Basis der Ebene bilden. In dieser Aufgabe soll der Satz nur für den Fall, dass A ein Kreis oder ein Kreisring

$$A = \{z \in \mathbb{C} : \varepsilon \leqslant |z| \leqslant R\}, \quad 0 < \varepsilon < R$$

ist bewiesen werden. Im zweiten Fall besteht ∂A aus dem positiv orientierten Kreisring $|z| = R$ und dem negativ orientierten Kreisring $|z| = \varepsilon$. Dann besagt der Stokes'sche Satz für $\omega = f dx + g dy$

$$\int\int_{\varepsilon\leqslant|z|\leqslant R} \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dxdy = \int_{|z|=R} (f dx + g dy) - \int_{|z|=\varepsilon} (f dx + g dy).$$

Man beweise diese Formel direkt durch Einführen von Polarkoordinaten $z = re^{i\theta}$, d.h.

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta.$$

Durch Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ erhält man den Fall des Kreises.