Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. G. Schumacher
M.Sc. Philipp Naumann

Wintersemester 2013/2014

Übungen zur Funktionentheorie II

– Blatt 2 –

Abgabe: Montag, den 04.11.2013, 12:00 -12:15 Uhr, Lahnberge SR IV

Aufgabe 1 (4 Punkte)

a) Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gitter und $\wp = \wp(\Omega)$. Für $g_2 = g_2(\Omega)$ und $g_3 = g_3(\Omega)$ sei die affine Kurve $X \subset \mathbb{C}^2$ gegeben durch

$$X := X(g_2, g_3) := \{(z_1, z_2) \; : \; z_2^2 = 4z_1^3 - g_2 z_1 - g_3\}.$$

Man zeige: Die Zuordnung

$$[z] \longmapsto (\wp(z), \wp'(z))$$

definiert eine bijektive Abbildung des punktierten Torus auf die affine Kurve X, also

$$\mathbb{C}/\Omega - \{[0]\} \cong X(g_2, g_3).$$

b) Sei $\tilde{X} \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ der projektive Abschluss der affinen Kurve X, also

$$\tilde{X} = \tilde{X}(g_2, g_3) = \{[z_0, z_1, z_2] \; : \; z_0 z_2^2 = 4z_1^3 - g_2 z_0^2 z_1 - g_3 z_0^3\}$$

Man zeige: Durch die Abbildung

$$\mathbb{C}/\Omega \longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C}),$$

$$[z] \longmapsto \begin{cases} [1, \wp(z), \wp'(z)] & \text{falls } z \notin \Omega, \\ [0, 0, 1] & \text{falls } z \in \Omega \end{cases}$$

wird eine bijektive Abbildung des gesamten Torus auf die projektive Kurve $\tilde{X}$ gegeben. Man nennt $\tilde{X}(g_2, g_3)$ die zum Gitter Ω gehörige elliptische Kurve.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Der Torus $\mathbb{C}/\Omega$ ist als Faktorgruppe der additiven Gruppe $\mathbb{C}$ selbst eine additive Gruppe. Wir übertragen die Gruppenstruktur mittels der Bijektion $\mathbb{C}/\Omega \to \tilde{X}$ zu einer Gruppenstruktur auf der elliptischen Kurve. Eine geometrische Form des Additionstheorems besagt dann:

Drei paarweise verschiedene Punkte a,b,c auf der elliptischen Kurve $\tilde{X}(g_2, g_3)$ haben genau dann die Summe Null, wenn sie auf einer Geraden liegen.

Die den Punkten a, b, c entsprechenden Punkte auf dem Torus seien $[u], [v], [w]$. Wir nehmen an, dass u, v, w und $u + v$ keine Gitterpunkte sind. Die drei Punkte liegen auf einer Geraden, falls

$$\det \begin{pmatrix} 1 & \wp(w) & \wp'(w) \\ 1 & \wp(v) & \wp'(v) \\ 1 & \wp(u) & \wp'(u) \end{pmatrix} = 0.$$

Bitte wenden

Die im obigen Theorem formulierte Bedingung besagt $u + v + w \equiv 0 \mod \Omega$. Da eine Gerade mit der elliptischen Kurve genau drei Schnittpunkte (mit Vielfachheit gerechnet) besitzt, kann es nur einen einzigen dritten Punkt $c = [1, \wp(w), \wp'(w)]$ mit dieser Eigenschaft geben. Das Additionstheorem in der geometrischen Form lautet dann

$$\det \begin{pmatrix} 1 & \wp(u+v) & -\wp'(u+v) \\ 1 & \wp(v) & \wp'(v) \\ 1 & \wp(u) & \wp'(u) \end{pmatrix} = 0. \quad (*)$$

Man leite die geometrische Form des Additionstheorems aus der analytischen Form ab.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Man beweise die geometrische Form $(*)$ mit Hilfe von Satz 1.9 (iii) aus der Vorlesung.
Hinweis: Man betrachte die elliptische Funktion

$$f(z) := \det \begin{pmatrix} 1 & \wp(z) & \wp'(z) \\ 1 & \wp(v) & \wp'(v) \\ 1 & \wp(u) & \wp'(u) \end{pmatrix}$$

und beweise, dass sie in den Gitterpunkten Pole dritter Ordnung hat, also eine elliptische Funktion vom Grad 3 ist. Danach untersuche man ihre Nullstellen.