Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. G. Schumacher
Philipp Naumann M. Sc.
Thorsten Herrig M. Sc.

Wintersemester 2013/2014

**Übungen zur Funktionentheorie II**

– Blatt 3 –

Abgabe: Montag, den 11.11.2013, 12:00 -12:15 Uhr, Lahnberge SR IV

### Aufgabe 1 (4 Punkte)

Wir nennen zwei Gitter $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{C}$ *äquivalent*, falls ein $\mu \in \mathbb{C}^*$ existiert mit

$$\Omega' = \mu \cdot \Omega.$$

a) Man zeige, dass jedes Gitter äquivalent ist zu einem Gitter der Form

$$\Omega_\tau := \mathbb{Z} \cdot \tau \oplus \mathbb{Z} \cdot 1$$

mit $\tau \in \mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \text{ mit } \operatorname{Im}(z) > 0\}$.

b) Man zeige, dass zwei Gitter $\Omega_\tau$ und $\Omega_\sigma$ mit $\tau, \sigma \in \mathbb{H}$ genau dann äquivalent sind, wenn eine Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ mit

$$\sigma = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$$

existiert.

*Hinweis:* Nach der Vorlesung gilt folgende Aussage: Seien $\{\omega_1, \omega_2\}$ und $\{\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2\}$ zwei Basen eines Gitters $\Omega$ in $\mathbb{C}$, dann existiert eine Matrix $A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$, sodass

$$\begin{pmatrix} \tilde{\omega}_1 \\ \tilde{\omega}_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}$$

gilt. Dabei gilt insbesondere $\det(A) = 1$ oder $\det(A) = -1$.

### Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gitter. Man beweise

$$\wp(2z) = \frac{1}{4} \left[ \frac{\wp''(z)}{\wp'(z)} \right]^2 - 2\wp(z)$$

für $z \in \mathbb{C} \setminus \frac{1}{2}\Omega$.

### Aufgabe 3 (4 Punkte)

Man zeige: Die Rektifikation einer Ellipse mit der Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (0 < b \leqslant a)$$

führt auf ein Integral vom Typ

$$\int \frac{1-k^2x^2}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}\,dx.$$

Welche Bedeutung hat dabei $k$? Der gesamte Umfang der Ellipse ist

$$U = 4a\int_0^1 \frac{1-k^2x^2}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}\,dx = 4a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2 t}\,dt.$$

**Aufgabe 4 (4 Punkte)**

Man beweise: Es gibt bei vorgegebenem Gitter $\Omega$ keine elliptische Funktion $f$, so dass jede weitere elliptische Funktion als rationale Funktion in $f$ darstellbar ist.
*Anleitung:* Man analysiere die Gleichung $f(z) = f(w)$ und zeige, dass $f$ eine elliptische Funktion der Ordnung 1 wäre.