Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
Stephan Dahlke
Manuel Werner

WS 2007/2008

7. Übungsblatt zur Vorlesung Computer Aided Geometric Design

Abgabe: Donnerstag, 07.02.2008, vor der Vorlesung

Aufgabe 18: *Bézier–Bernstein–Basis als B–Splines*

Weisen Sie nach, dass mit der Knotenfolge $T = \{\theta_i\}_{i=1}^{2k}$, $\theta_1 = \cdots = \theta_k = 0$, $\theta_{k+1} = \cdots = \theta_{2k} = 1$ gilt

$$N_{i,k}(\theta) = B_{i-1}^{k-1}(\theta) = \binom{k-1}{i-1}\theta^{i-1}(1-\theta)^{k-i}, \quad \theta \in [0,1], \quad i = 1, \ldots, k.$$

(4)

Aufgabe 19: *Punktauswertung von Splinefunktionen und deren Ableitungen*

i) Implementieren Sie eine Funktion `spline_expansion(T, k, c, theta)`, welche die Splinefunktion $S(\theta) = \sum_{i=1}^{n} c_i N_{i,k}(\theta)$ an den durch `theta` gegebenen Stellen auswertet. In der Variablen `T` soll die zu den B-Splines gehörige Knotensequenz übergeben werden.

ii) Erweitern Sie die Funktion aus Teil i), so dass auch Ableitungen einer Splinefunktion ausgewertet werden können.

(3+3)

Aufgabe 20: *Bernstein– und Schönberg–Operator*

Zeigen Sie, für die spezielle Knotenfolge T aus Aufgabe 18 ist der Bernstein–Operator

$$B_m(f)(t) = \sum_{i=0}^{m} f\left(\frac{i}{m}\right)\binom{m}{i} t^i(1-t)^{m-i}, \quad t \in [0,1]$$

ein Spezialfall des Schönberg–Operators $V_T : C[0,1] \to S_k(T)$,

$$V_T(f)(\theta) = \sum_{i=1}^{n} f(\theta_{i,T})N_{i,k}(\theta), \quad \theta_{i,T} := \frac{1}{k-1}(\theta_{i+1} + \cdots + \theta_{i+k-1}).$$

(3)

Aufgabe 21: *Approximationseigenschaften des Schönberg–Operators*

Beweisen Sie, dass für jede Funktion $f \in \mathcal{C}^2[a,b]$ gilt

i) $\|f - V_T f\|_\infty[a,b] \le Ch^2\|\ddot{f}\|_\infty[a,b]$

ii) $\|f - V_T f\|_\infty[\theta_i, \theta_{i+1}] \le Ch^2\|\ddot{f}\|_\infty[\theta_{i-k+1}, \theta_{i+k}]$,

mit einer von f und T unabhängigen Konstanten $C < \infty$. (3)