**Universität Marburg**
**Fachbereich Mathematik**
**Prof. Dr. B. Schmitt, Dr. M. Werner**

**Winter-Semester 2009/2010**

# Übungen zur Numerik II - Endlichdimensionale Probleme

Hinweise zur Lösung des 9. Aufgabenblatts

## Aufgabe 30

i) Zum Nachweis der Rekursionsformel verwenden wir die Rekursion (2.1.11) $T_{k+1}(s) = 2sT_k(s) - T_{k-1}(s)$. Man wende diese bei $\varrho_k = 2q\frac{T_k(q)}{T_{k+1}(q)}$ im Nenner an. Dann ist man schnell am Ziel.

ii) Zum Nachweis der Konvergenz und der Identifizierung des Grenzwertes wendet man den Banachschen Fixpunktsatz auf die Funktion $f(t) := \frac{1}{1-t/(4q^2)}$ an. Die angegebene Rekursion ist offensichtlich eine Fixpunktiteration mit $f$: $\varrho_{k+1} = f(\varrho_k)$. Der erste Schritt besteht nun in der Bestimmung der Fixpunkte von $f$ aus $f(\varrho) = \varrho$. Mit Hilfe des BFS zeigt man dann die Konvergenz gegen einen entsprechenden Fixpunkt. Bitte alle im BFS benötigten Voraussetzungen sauber nachweisen! Bei der Kontraktivität hilft wie immer der Mittelwertsatz der Differentialrechnung.

## Aufgabe 31

a) Zur Erinnerung: Die Iterationsvorschrift lautet $x^{(k+1)} := x^{(k)} + \omega d^{(k)}$, $d^{(k)} := r - Ax^{(k)}$. Mit $\omega = 1/l_1$ 10 Schritte durchführen. Dann $\|d^{(10)}\|_2/\|d^{(9)}\|_2 = 1 - \omega\ell_n$ nach $\ell_n$ auflösen. Warum $\ell_n$ eine Schätzung für $\lambda_n$ ist, kann man bei Bedarf auf den Seiten 50/51 im Skript nachlesen.

b) Sollte klar sein. Die Ausgaben nicht vergessen!

c) Ein Schritt der Tschebyscheff-Iteration lautet

$$\tilde{x}^{(k+1)} := x^{(k)} + \frac{2}{a+b}(r - Ax^{(k)}), \quad x^{(k+1)} := \varrho_k \tilde{x}^{(k)} + (1-\varrho_k)x^{(k-1)}.$$

Die Parameter $\varrho_k$ sind dabei schrittweise mit Hilfe der Rekursion aus Aufgabe 30 aufzubauen. Der erste Teilschritt besteht aus einem Standard-Relaxationsschritt mit $\omega = 2/(a+b)$. Der zweite Teilschritt kann dann in ein und derselben Funktion mit einer Booleschen Variablen TSCHEB ein- und ausgeschaltet werden. Auch hier am Ende bitte nicht die Ausgaben vergessen.