Universität Marburg **Winter-Semester 2009/2010**
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. B. Schmitt, Dr. M. Werner

Übungen zur Numerik II - Endlichdimensionale Probleme
1. Aufgabenblatt

Aufgabe 1 Betrachten Sie die Matrix (3)

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 2 & 0 & -2 \\ 5 & 4 & -7 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Eigenwerte von A sowie ihre algebraischen und geometrischen Vielfachheiten. Geben Sie weiter die Transformationsmatrix X und die Jordansche Normalform $J = X^{-1}AX$ von A an.

Aufgabe 2 Die Eigenwerte einer Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ hängen stetig von den Einträgen a_{ij} ab. Diese Aussage gilt aber nicht für die Eigenvektoren, auch nicht bei symmetrischen Matrizen. Insbesondere kann die Jordan-Normalform einer Matrix sehr empfindlich auf Änderungen reagieren. Für $n = 2$ betrachte man die Beispiele (3)

$$A := \begin{pmatrix} 1+\varepsilon\cos\frac{2}{\varepsilon} & -\varepsilon\sin\frac{2}{\varepsilon} \\ -\varepsilon\sin\frac{2}{\varepsilon} & 1-\varepsilon\cos\frac{2}{\varepsilon} \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1+\varepsilon & 1 \\ 0 & 1-\varepsilon \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie jeweils die Eigenwerte und Eigen- bzw. Hauptvektoren und betrachten Sie den Grenzübergang $\varepsilon \to 0$, wo beide Matrizen den doppelten Eigenwert 1 besitzen.

Aufgabe 3 Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sei invertierbar und besitze die Zerlegung $A = LR$, $L = (\ell_{i,j})$ untere und $R = (r_{i,j})$ obere Dreiecksmatrix, $\ell_{i,i} = 1$. Beweisen Sie die folgende Eigenschaft, auf der eine wichtige Methode zur Eigenwertberechnung beruht: (3)

a) Ist A eine obere Hessenberg-Matrix, so hat L die Form

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ * & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & * & 1 \end{pmatrix}$$

und RL ist eine obere Hessenberg-Matrix.

b) Ist A eine Tridiagonalmatrix, so ist dies auch RL.

Bitte wenden!

Aufgabe 4 Für die Anzahl a_n derjenigen Binärworte der Länge n, in denen höchstens 2 Nullen hintereinander auftreten dürfen, gilt die Rekursion (5)

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3},\ n \geq 4,\ \text{ mit } a_1 = 2,\ a_2 = 4,\ a_3 = 7.$$

a) Zeigen Sie, dass für die Fenster-Vektoren $z^{(n)} := (a_n, a_{n+1}, a_{n+2})^\mathsf{T}$ folgende Rekursion gilt

$$z^{(n)} = F z^{(n-1)}, \quad \text{mit } F := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Zeigen Sie, dass F einen Eigenwert $\lambda_1 \cong 1.839286755$ besitzt und berechnen Sie den zugehörigen Eigenvektor $x^{(1)}$.

c) Zeigen Sie, dass für die Fenstervektoren folgende Darstellung gilt

$$z^{(n)} = \sum_{j=1}^{3} \lambda_j^{n-1} c_j x^{(j)},$$

wobei die Koeffizienten $c_j = {y^{(j)}}^* z^{(1)}$ sind mit den Links-Eigenvektoren $y^{(j)}$ von F.

d) Da hier $\lambda_1 \gg |\lambda_2| = |\lambda_3|$ gilt, wird die Lösung für große n gut approximiert durch

$$z^{(n)} \cong \lambda_1^{n-1} c_1 x^{(1)}.$$

Bestimmen Sie damit eine Approximation an die Wortanzahl a_{16}.

Abgabe: Mittwoch, 28.10.09, vor der Vorlesung