**Universität Marburg** **Winter-Semester 2009/2010**
**Fachbereich Mathematik**
**Prof. Dr. B. Schmitt, Dr. M. Werner**

# Übungen zur Numerik II - Endlichdimensionale Probleme

3. Aufgabenblatt

**Aufgabe 9** Bei Vektor- und orthogonaler Iteration kann der betragsgrößte Eigenwert $\lambda_1$ bei Kenntnis des Eigenvektors ausgeblendet werden. Es sei $x^{(1)}$ ein auf $\|x^{(1)}\|_2 = 1$ normierter Eigenvektor der diagonalisierbaren Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ zu $\lambda_1$. Die Eigenwerte und -vektoren von $A$ seien mit $\lambda_j$ bzw. $x^{(j)}$ bezeichnet. Damit werde definiert (4)

$$B := (I - x^{(1)}x^{(1)^*})A.$$

a) Zeigen Sie, daß $B$ die Eigenwerte $\{\lambda_2, \dots, \lambda_n, 0\}$ besitzt und bestimmen Sie alle Eigenvektoren.

b) Die Matrix $U^{(0)} = (x^{(1)}, u^{(0)}) \in \mathbb{C}^{n\times 2}$ sei orthogonal. Zeigen Sie, daß bei der orthogonalen Iteration mit der Matrix $A$ und Startmatrix $U^{(0)}$ in der zweiten Spalte von $U^{(k)}$ dann im wesentlichen eine Vektoriteration mit $B$ durchgeführt wird.

**Aufgabe 10** Führen Sie bei der Matrix $A := \begin{pmatrix} 2 & b \\ \varepsilon & 1 \end{pmatrix}$ mit $b, \varepsilon \in \mathbb{R}$, $0 < \varepsilon \ll 1$, einen Schritt des $QR$-Verfahrens mit Spektralverschiebung $\lambda = a_{22}$ durch. Welche Größenordnung hat danach das Subdiagonalelement, insbesondere im symmetrischen Fall ($b = \varepsilon$)? (3)

**Aufgabe 11** Beim $QR$-Verfahren mit Spektralverschiebung ist die Reihenfolge der Eigenwerte in der Hauptdiagonale nicht vorbestimmbar. Sie kann aber nachträglich einfach geändert werden. (4)

a) Bestimmen Sie eine unitäre Matrix

$$G = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \quad \text{zu} \quad A = \begin{pmatrix} \lambda_2 & b \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

so, daß in der transformierten Matrix $G^*AG$ die beiden Eigenwerte vertauscht sind und $G^*AG$ Dreieckform besitzt. Welche Bedeutung hat dabei der Vektor $Ge^{(1)}$?

b) Wie kann dieses Ergebnis dazu benutzt werden, um die Eigenwerte einer beliebigen Dreieckmatrix umzuordnen, etwa um $R$ mit $r_{jj} = \lambda_j,\ j = 1, \dots, n$ auf Dreieckform $U^*RU$ mit den Diagonalelementen $\lambda_i, \lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_n$ zu transformieren?

**Abgabe:** Mittwoch, 11.11.09, vor der Vorlesung