Universität Marburg **Winter-Semester 2009/2010**
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. B. Schmitt, Dr. M. Werner

Übungen zur Numerik II - Endlichdimensionale Probleme

5. Aufgabenblatt

Aufgabe 15 Mit $a \in \mathbb{R}$ werde die Tridiagonalmatrix (3)

$$A := \begin{pmatrix} a & 1 & & & \\ 1 & a & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & a & 1 \\ & & & 1 & a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

betrachtet. Die Polynome $p_k(\lambda)$, $k = 0, \dots, n$, der zugehörigen Sturmschen Kette seien wie in der Vorlesung definiert.

a) Zeigen Sie induktiv, dass das Polynom $p_k(\lambda)$ für $\left\{ \begin{array}{c} \text{gerades} \\ \text{ungerades} \end{array} \right\}$ k eine $\left\{ \begin{array}{c} \text{gerade} \\ \text{ungerade} \end{array} \right\}$ Funktion der Größe $a - \lambda$ ist und geben Sie $p_k(a)$ an, $0 \le k \le n$.

b) Zeigen Sie, dass A jeweils $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ Eigenwerte links und rechts von der Stelle a besitzt.

Aufgabe 16 Programmieren Sie das Bisektionsverfahren (1.4.10) für nicht-zerfallende, symmetrische Tridiagonalmatrizen $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Berechnen Sie damit alle Eigenwerte der durch (5*)

$$a_{ii} = |9 - i|, \ i = 1, \dots, n, \quad a_{i,i+1} = 1, \ j = 1, \dots, n-1,$$

gegebenen Matrix für $n = 17$. Da eine nicht-zerfallende Tridiagonalmatrix nur einfache Eigenwerte besitzt, ist das Abbruchkriterium so zu wählen, dass für die Eigenwerte die Fehler-Intervalle tatsächlich disjunkt sind.

Für die beiden größten Eigenwerte $\lambda_{16}, \lambda_{17}$ ist außerdem der zugehörige Eigenvektor x zu berechnen. Dazu kann mit $x_1 := 1$ das Tridiagonalsystem $(A - \lambda I)x = 0$ rekursiv nach $x_2, x_3, \dots, x_n$ aufgelöst werden. Bestimmen Sie anschließend die Genauigkeit dieser Eigenvektor-Näherung durch Berechnung des Defekts $|a_{n,n-1}x_{n-1} + (a_{nn} - \lambda)x_n| / \|x\|_2$.

Bitte wenden!

Aufgabe 17 Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ besitze nur positive Elemente $a_{ij} > 0\,\forall i,j = 1,\dots,n$. (4)
Zeigen Sie, dass dann die folgenden Eigenschaften gelten.

a) Der Spektralradius ist ein einfacher Eigenwert von A, es gilt $\varrho(A) = \lambda_1 > |\lambda_j|\ \forall j > 1$.

b) Zu λ_1 gibt es einen positiven Eigenvektor $x^{(1)}$ mit $x_i^{(1)} > 0$, $i = 1,\dots,n$.

c) Hat die Matrix $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ größere Elemente als A, d.h., $b_{ij} > a_{ij}$ für $i,j = 1,\dots,n$, gilt $\varrho(B) > \varrho(A)$.

Die Aussagen sind hier nur für symmetrische Matrizen A, B nachzuweisen (Courant!).

Aufgabe 18 Die symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ besitze mit $n = k + m$ die Blockstruktur (3)

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ C^\mathsf{T} & D \end{pmatrix}, \quad B = B^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^{k\times k},\ D = D^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^{m\times m},\ C \in \mathbb{R}^{k\times m}.$$

a) Zeigen Sie, dass zu jedem Eigenwert μ von B oder D ein Eigenwert $\lambda(A)$ existiert mit

$$|\lambda(A) - \mu| \le \|C\|_2 = \|C^\mathsf{T}\|_2.$$

b) Beim QR-Verfahren mit einer symmetrischen Tridiagonalmatrix A trete ein kleines Subdiagonalelement auf mit $|a_{k+1,k}| = \epsilon$, $1 \le k < n$. Schätzen Sie den Fehler ab, den man durch Deflation macht, indem man dieses Element ignoriert.

Abgabe: Mittwoch, 25.11.09, vor der Vorlesung, **Programmieraufgabe** eine Woche später