Universität Marburg **Winter-Semester 2009/2010**
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. B. Schmitt, Dr. M. Werner

Übungen zur Numerik II - Endlichdimensionale Probleme

7. Aufgabenblatt

Aufgabe 23 Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, besitze die Singulärwerte $\sigma_1 \geq \ldots \geq \sigma_k$, $k = \min\{m, n\}$. (2)
Beweisen Sie folgende Charakterisierung mit Hilfe von linearen Unterräumen $S \subseteq \mathbb{R}^n$:

$$\sigma_j = \max_{\dim(S)=j} \min \left\{ \frac{\|Ay\|_2}{\|y\|_2} : \; y \in S,\, y \neq 0 \right\}.$$

Aufgabe 24 Beweisen oder widerlegen Sie jeweils die beiden Richtungen der folgenden Behauptung: Zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sind genau dann orthogonal äquivalent, d. h. $A = U^\top BU$ für eine orthogonale Matrix $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$, wenn A und B die gleichen Singulärwerte besitzen. (2)

Aufgabe 25 Für eine allgemeine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $k := \min\{m, n\}$, sei die (Singulärwert-) Zerlegung $A = UDV^\top$ gegeben mit orthogonalen Matrizen $U \in \mathbb{R}^{m\times k}$, $V \in \mathbb{R}^{n\times k}$, und einer Diagonalmatrix $D = \mathrm{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_k \geq 0$. (3)

a) Zeigen Sie, dass $\|A\|_2 = \sigma_1$ ist und geben Sie Vektoren x und y an, für die jeweils gilt $\|Ax\|_2 = \|A\|_2\|x\|_2$ und $\|y^\top A\|_2 = \|y^\top\|_2\|A\|_2$.

b) Zeigen Sie im Fall $k = m = n$, dass A genau dann regulär ist, wenn $\sigma_n > 0$ gilt und zeigen Sie für diesen Fall, dass $\|A^{-1}\|_2 = \sigma_n^{-1}$.

c) Begründen Sie im Fall $k = m = n$ die Ungleichung $\sigma_n \leq |\lambda_n| \leq |\lambda_1| \leq \sigma_1$ für die Eigenwerte von A.

Bitte wenden!

Aufgabe 26 Zur *Regularisierung* von allgemeinen Gleichungssystemen $Ax = y$ kann man zu $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $y \in \mathbb{R}^m$, die modifizierte Normalengleichung (4)

$$(A^\mathsf{T} A + \alpha^2 I)x = A^\mathsf{T} y, \quad \alpha > 0,$$

betrachten. Die zugehörige Lösung soll mit Hilfe der Singulärwertzerlegung $A = U\Sigma V^\mathsf{T}$, $k = \min\{m, n\}$, analysiert werden.

a) Zeigen Sie, dass das regularisierte System immer lösbar ist und geben Sie die Lösung in der Form $x_\alpha = \sum_{j=1}^{k} \xi_j v^{(j)} {u^{(j)}}^\mathsf{T} y$ an.

b) Mit $\varepsilon > 0$ sei $r_\varepsilon := \mathrm{Rg}_\varepsilon(A)$ und x_ε^+ die damit definierte Schwellenlösung (vgl. (1.7.8)). Zeigen Sie die Schranke

$$\|x_\alpha - x_\varepsilon^+\|_2 \leq \max\left\{\frac{\alpha^2}{\varepsilon(\varepsilon^2 + \alpha^2)}, \frac{\epsilon}{\alpha^2}\right\}\|y\|_2$$

und bestimmen Sie dasjenige $\alpha = \alpha(\varepsilon)$, für das der Vorfaktor bei $\|y\|$ minimal wird.

Abgabe: Mittwoch, 09.12.2009, vor der Vorlesung