Universität Marburg **Winter-Semester 2009/2010**
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. B. Schmitt, Dr. M. Werner

Übungen zur Numerik II - Endlichdimensionale Probleme

10. Aufgabenblatt

Aufgabe 32 Führen Sie bei der Tridiagonalmatrix (3)

$$A = \begin{pmatrix} \frac{19}{12} & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

und dem Startvektor $q = u^{(1)} = \frac{1}{5}(4, 3, 0)^\mathsf{T}$ die ersten beiden Schritte des Arnoldiverfahrens aus bis zur Berechnung von h_{13}.

Aufgabe 33 Es sei U_m die orthogonale Basismatrix des Krylovraums $\mathcal{K}_m(A, r)$, $H_m = U_m^\mathsf{T} A U_m$ (5)
und A regulär und $y^{(m)} \in \mathbb{R}^m$ die Lösung des Systems $H_m y^{(m)} = \|r\|_2 e^{(1)}$.

a) Zeigen Sie, dass damit $x^{(m)} := U_m y^{(m)}$ die sog. *Galerkin*-Bedingung erfüllt

$$v^\mathsf{T}(r - Ax^{(m)}) = 0 \quad \forall v \in \mathcal{K}_m(A, r).$$

b) Es sei $P_m = U_m U_m^\mathsf{T}$ der Orthogonalprojektor auf $\mathcal{K}_m(A, r)$ und $c_m := \|P_m A(I - P_m)\|_2$. Dann gilt für den Abstand der Näherung $x^{(m)}$ von der besten Approximation $P_m z$ aus $\mathcal{K}_m(A, r)$ an die Lösung $z = A^{-1} r$ die Aussage

$$\|x^{(m)} - P_m z\|_2 \leq c_m \|H_m^{-1}\| \, \|(I - P_m)z\|_2.$$

c) Geben Sie mit Hilfe der Abschätzung aus Teil b) eine obere Schranke für den Gesamtfehler $\|x^{(m)} - z\|_2$ an.

Aufgabe 34 Es sei $A = XJX^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine diagonalisierbare Matrix mit $J =$ (2)
$\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ und $p \in \Pi_m$ ein Polynom vom Grad m. Auf das lineare Gleichungssystem $Ax = r, r \in \mathbb{R}^n$, werde nun das GMRES-Verfahren angewandt. Zeigen Sie, dass für die Norm δ_k des k-ten Defekts gilt

$$\delta_k \leq \kappa_2(X) \epsilon_k \|r\|_2,$$

wobei $\epsilon_k := \min\limits_{p \in \Pi_k, p(0)=1} \max\limits_{1 \leq i \leq n} |p(\lambda_i)|$. *Hinweis:* Aufgabe 28 a)

Abgabe: Mittwoch, 20.01.2010, vor der Vorlesung