Universität Marburg **Winter-Semester 2009/2010**
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. B. Schmitt, Dr. M. Werner

Übungen zur Numerik II - Endlichdimensionale Probleme

11. Aufgabenblatt

Aufgabe 35 Für eine symmetrisch, positiv-definite Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist die Funktion $\phi(x) = \frac{1}{2}x^\mathsf{T}Ax - r^\mathsf{T}x$ streng konvex und hat daher ein eindeutiges Minimum, welches in $z = A^{-1}r$ liegt. Dabei gilt $-\text{grad}\phi(x) = r - Ax =: d$. Beim einfachen Gradientenverfahren (Verfahren des steilsten Abstiegs) macht man ausgehend vom Startpunkt $x^{(0)} \neq z$ einen Suchschritt $y(t) := x^{(0)} + td^{(0)}$ mit dem globalen Minimum der quadratischen Funktion $\psi(t) := \phi(y(t))$. (3)

a) Bestimmen Sie die Minimalstelle $\hat{t}$ mit $\psi(\hat{t}) = \min\{\psi(t) : t \in \mathbb{R}\}$.

b) Eine neue Näherung wird definiert durch $x^{(1)} = x^{(0)} + \hat{t}\, d^{(0)}$. Zeigen Sie, dass dann für den neuen Defekt $d^{(1)} = r - Ax^{(1)}$ gilt $d^{(1)} \perp d^{(0)}$.

Aufgabe 36 Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sei symmetrisch, positiv definit. Für den Vektor $b \in \mathbb{R}^n$ gelte $b \in U \subseteq \mathbb{R}^n$, wobei U ein invarianter Unterraum von A ist, $AU \subseteq U$. (3)

a) Zeigen Sie, dass die Lösung z des LGS $Ax = b$ in U liegt.

b) Zeigen Sie, dass das CG-Verfahren nach spätestens $\dim(U)$ Schritten die Lösung z liefert.

Aufgabe 37 Eine Seifenhaut mit Auslenkung $u(x)$ sei an den Rändern des Einheitsquadrats $\Omega := [0,1]^2$ in der Höhe f fest eingespannt. In Ω kann die <u>Minimalfläche</u> u dann als Lösung des Dirichlet-Problems (7*)

$$\begin{cases} \Delta u(x) &=& 0\,, & x \in \Omega \\ u(x) &=& f(x)\,, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

modelliert werden. Führt man ein äquidistantes rechteckiges Gitternetz mit je $m+2$ Knoten pro Zeile und Spalte ein, so lässt sich die Auslenkung $u(x)$ im Knoten $\left(\frac{i}{m+1}, \frac{j}{m+1}\right)$ durch $u_{i,j}$ approximieren, wobei

$$\begin{cases} u_{i,j} - \dfrac{1}{4}(u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1}) &=& 0\,, & 1 \le i,j \le m \\ u_{i,j} &=& f\left(\dfrac{i}{m+1}, \dfrac{j}{m+1}\right)\,, & i \text{ oder } j \in \{0, m+1\} \end{cases}.$$

Nach Zusammenfassen der $n = m^2$ Unbekannten $u_{i,j}$, $1 \le i \le m$ zu einem Vektor $v = (v_i)_{i=1,\dots,n}$, wobei $v_{(i-1)m+j} = u_{i,j}$, erhält man ein lineares Gleichungssystem $Av = b$ mit einer symmetrischen, positiv definiten Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Bitte wenden!

Schreiben Sie ein Unterprogramm zur Berechnung $v \mapsto Av$, ohne A explizit im Speicher aufzustellen und implementieren Sie dann das CG-Verfahren (2.2.24) aus der Vorlesung. Wählen Sie als Spannhöhen

$$f(x) := \begin{cases} 0\,, & x_1 = 0 \\ x_2\,, & x_1 = 1 \\ x_1 - x_1^2\,, & x_2 = 0 \\ 2x_1^3 - x_1\,, & x_2 = 1 \end{cases},$$

das Abbruchkriterium $\|r^{(k)}\|_2/\|r^{(0)}\|_2 \leq 10^{-6}$ und lösen Sie damit das System $Av = b$, für $m = 2^q + 1$, $q = 1, \ldots, 7$.

Ausgabe: q, Anzahl Iterationsschritte, $u_{2^{q-1}+1,2^{q-1}+1}$ (Auslenkung bei $x = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^\top$).

Abgabe: Mittwoch, 27.01.2010, vor der Vorlesung, Programmieraufgabe 37 eine Woche später.