Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
Stephan Dahlke Manuel Werner SoSe 2008

## 7. Übungsblatt zur Numerik I

**Abgabe: Dienstag, 10.06.2008, vor der Vorlesung,**
**Programmieraufgabe: eine Woche später**

**Aufgabe 24:** *Vandermonde-Determinante*

Beweisen Sie Formel (6.1.4) der Vorlesung, d.h. für

$$V_n := V(t_0, t_1, \ldots, t_n) := \begin{pmatrix} 1 & t_0 & t_0^2 & \ldots & t_0^n \\ 1 & t_1 & t_1^2 & \ldots & t_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & t_n & t_n^2 & \ldots & t_n^n \end{pmatrix} \text{ gilt } \det V_n = \prod_{i=0}^{n-1} \prod_{j=i+1}^{n} (t_j - t_i).$$

(4)

**Aufgabe 25:** *Newton-Interpolation*

Man interpoliere $\cos(x)$ im Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$ an den drei Stützstellen $0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$ durch eine Parabel $p$. Geben Sie die Newton-Darstellung von $p$ an. Schätzen Sie anschließend den Fehler $\max_{x\in[0,\frac{\pi}{2}]} |\cos(x) - p(x)|$ ab. (5)

**Aufgabe 26:** *Horner-Schema*

Es sei $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten.

i) Geben Sie einen Algorithmus zur Auswertung von $p$ an einer Stelle $\xi$ an, welcher $2n$ Rechenoperationen (Multiplikationen und Additionen) benötigt.

ii) Modifizieren Sie Ihr Verfahren aus i), so dass zusätzlich $p'(\xi)$ berechnet wird und der Gesamtrechenaufwand $4n - 2$ Operationen beträgt.

(3+3)

**Aufgabe 27:** *Hermite-Interpolation*

Es seien $t_0, \ldots, t_n$ paarweise verschiedene Stützstellen und $f_i^{(j)} \in \mathbb{R}$, $i = 0, \ldots, n$, $j = 0, \ldots, s_i$. Weisen Sie die Eindeutigkeit des Polynoms $P \in \Pi_m$, $m = n + \sum_{i=0}^{n} s_i$ nach, welches

$$P^{(j)}(t_i) = f_i^{(j)}, \quad i = 0, \ldots, n,\ j = 0, \ldots, s_i$$

erfüllt. (2)

**Bitte wenden!**

**Programmieraufgabe 28:** *Polynom-Interpolation*

Sei $f \in C[a,b]$ gegeben. Zu festem $n = 0, 1, \ldots$ seien beliebige reelle Daten $(x_j, f(x_j))$ mit $x_j \neq x_k$ für $j \neq k$ und $x_j \in [a,b]$, $j, k = 0, \ldots, n$ gegeben.

i) Schreiben Sie ein Programm zur Auswertung des Interpolationspolynoms $p \in \Pi_n$ zu den obigen Daten

   a) in der Newton-Form,

   b) mittels des Neville-Aitken-Schemas.

ii) Testen Sie das Programm für $[a,b] = [-1,1]$ und die Funktion $f(x) = \dfrac{1}{1+25x^2}$ (Beispiel von Runge). Berechnen Sie dazu für

   a) äquidistante Knoten $x_j = -1 + \frac{2j}{n}$, $j = 0, \ldots, n$, $n = 2, 4, 8, 16$,

   b) Tschebyscheff-Knoten $x_j = -\cos(\frac{2j+1}{2n+2}\pi)$, $j = 0, \ldots, n$, $n = 2, 4, 8, 16$

   jeweils den Fehler $\varepsilon = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - p(x)|$ und eine Stelle $x_{\max}$, für die $\varepsilon = |f(x_{\max}) - p(x_{\max})|$ gilt.

(10+5)

**Organisatorisches:**

- **Klausurtermin: Dienstag, 24.06.2008, 11.00 Uhr, HG 116, Hörsaalgebäude. Dauer: 150 Minuten, ohne Hilfsmittel.**
- **Die Anmeldung zur Klausur kann in der Vorlesung oder bei Manuel Werner, Raum D6425, Lahnberge, noch bis Dienstag, den 10.06.2008 geschehen.**