

Übungen zur NUMERIK I  
5. Aufgabenblatt

**Aufgabe 17** Die Differenz von zwei Quadraten kann auf die beiden Weisen  $a \cdot a - b \cdot b = (a + b)(a - b)$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ , ausgewertet werden, welche jeweils drei Operationen erfordern. (4)

a) Bestimmen Sie für beide Varianten der Formel die zu erwartenden Rundungsfehler bei exakter Eingabe  $a, b \in M$ , wobei Produkte der Größenordnung  $\mathcal{E}^2$  vernachlässigt werden.

b) Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse aus a) mit den in Aufgabe 16 b) tatsächlich aufgetretenen Rundungsfehlern.

**Aufgabe 18** Die Größe  $b \in \mathbb{R}$  sei eine Konstante. Berechnen Sie für die Funktion (2)

$$F(x_1, x_2) = \frac{1}{1 + x_1 e^{bx_2}}$$

die Konditionszahlen  $\kappa_1, \kappa_2$  und bestimmen Sie für  $b = 1$  deren Wert an den Stellen  $(x_1, x_2) = (150, 5)$  und  $(x_1, x_2) = (-150, -5)$ .

**Aufgabe 19** Für  $x \in \mathbb{R}$  werde die quadratische Gleichung  $xz^2 + 2z - x = 0$  betrachtet. (4)  
Die Lösungsformel für diejenige Lösung, welche für  $x \rightarrow 0$  beschränkt bleibt, ist  $z = F(x) := \frac{1}{x}(\sqrt{1 + x^2} - 1)$ .

a) Die Formel für  $F$  besteht aus 5 Operationen einschließlich der Wurzelbildung. Setzen Sie entsprechend die Funktion  $F = \phi_5 \circ \phi_4 \circ \phi_3 \circ \phi_2 \circ \phi_1$  aus elementaren Abbildungen  $\phi_k$  zusammen mit  $\phi_2, \phi_3, \phi_4 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

b) Der bei numerischer Auswertung in Abbildung  $\phi_2$  eingeschleppte Fehler wird mit der Restabbildung  $\psi := \phi_5 \circ \phi_4 \circ \phi_3$  auf den Endfehler übertragen. Berechnen Sie zu  $z = \psi(y)$ ,  $y = \phi_2(\phi_1(x))$  die Konditionszahlen  $\kappa_{y_i}$  für  $x \rightarrow 0$ .

c) Geben Sie eine bei  $x \cong 0$  günstigere Darstellung für  $F$  an.

**Abgabe:** Freitag, 29.05.09, vor der Vorlesung.