

Übungen zur NUMERIK I
8. Aufgabenblatt

Aufgabe 27 Mit $0 < a \leq b$ und $c \in \mathbb{R}$ wird die folgende Dreiecksmatrix betrachtet (3)

$$R := \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & b & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

- Berechnen Sie R^{-1} und $\|R^{-1}\|_\infty$.
- Berechnen Sie die Schranke $\|z\|_\infty$ aus Satz 4.4.3 für $\|R^{-1}\|_\infty$. Wann sind beide Werte gleich?
- Sind die Parameter $0 < a \leq b$, $c \in \mathbb{R}$ so wählbar, dass das Verhältnis $\|z\|_\infty / \|R^{-1}\|_\infty$ beliebig groß wird?

Aufgabe 28 Zeigen Sie, dass durch Äquilibration die Konditionszahl κ_∞ einer regulären (3) Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ minimiert wird. Beweisen Sie dazu, dass für jede reguläre Diagonalmatrix $D = \text{diag}(d_i)$ gilt

$$\sum_{j=1}^n |a_{ij}| = 1 \quad \forall i = 1, \dots, n \quad \Rightarrow \quad \kappa_\infty(A) \leq \kappa_\infty(DA).$$

Aufgabe 29 Es sei $K \subseteq B$ eine kompakte Teilmenge eines Banachraums B und $g : B \rightarrow B$ (4) eine in K schwach kontrahierende Abbildung mit $g(K) \subseteq K$ und

$$\|g(x) - g(y)\| < \|x - y\| \quad \forall x, y \in K, \quad x \neq y.$$

- Zeigen Sie, dass g genau einen Fixpunkt $z \in K$ besitzt. *Hinweis:* Diskussion der Funktion $\varphi(x) := \|x - g(x)\|$.
- Zeigen Sie, dass die Iteration $x_0 \in K$,

$$x_{n+1} := g(x_n), \quad n = 0, 1, \dots,$$

gegen diesen Fixpunkt konvergiert.

Abgabe: Freitag, 19.06.09, vor der Vorlesung