Universität Marburg **Sommer-Semester 2009**
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. B. Schmitt, M. Werner

Übungen zur Numerik I

10. Aufgabenblatt

Aufgabe 34 Mit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m < n$, und $\text{Rang}(A) = m$ wird das unterbestimmte Gleichungssystem $Ax = b$ für $x \in \mathbb{R}^n$ betrachtet. (3)

a) Zeigen Sie, dass die Lösung x^+ kleinster Norm die Form $x^+ = A^\mathsf{T} y$ hat, wobei $y \in \mathbb{R}^m$ das Gleichungssystems $Gy = b$ löst, $G := AA^\mathsf{T}$.

b) Es seien $a^{(i)} := A^\mathsf{T} e^{(i)}$, $i = 1, \ldots, m$, die Zeilenvektoren von A. Mit $x^{(0)} := 0$ werde die Iterationsfolge

$$x^{(\ell+1)} := x^{(\ell)} + \frac{b_i - {a^{(i)}}^\mathsf{T} x^{(\ell)}}{\|a^{(i)}\|_2^2}\, a^{(i)},\ i := (\ell \bmod m) + 1,$$

$\ell = 0, 1, 2, \ldots$ betrachtet. Stellen Sie den Zusammenhang der Teilfolge $(x^{(km)})_{k\geq 0}$ mit der Iterationsfolge $(y^{(k)})_{k\geq 0}$, $y^{(0)} = 0$, des Einzelschrittverfahrens beim System $Gy = b$ her.

Aufgabe 35 Wenn die Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m \geq n$, vollen Rang n besitzt, hat die Kleinste-Quadrate-Lösung x^+ zum System $Ax = b$ auch die Darstellung $x^+ = A^+ b$ mit $A^+ = (A^\mathsf{T} A)^{-1} A^\mathsf{T}$. (3)

a) Beweisen Sie für diese *Pseudoinverse* die vier Eigenschaften

$$(AA^+)^\mathsf{T} = AA^+,\ (A^+A)^\mathsf{T} = A^+A, \quad AA^+A = A,\ A^+AA^+ = A^+.$$

b) Zeigen Sie, dass $P = A(A^\mathsf{T} A)^{-1} A^\mathsf{T}$ der Orthogonalprojektor auf $R(A)$ ist.

Aufgabe 36 Zeigen Sie, dass im Spezialfall $m = n + 1$, $\text{Rang}A = n$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, die Kleinste-Quadrate-Lösung $\hat{x}$, mit $\|A\hat{x} - y\|_2 = \min_x \|Ax - y\|_2$ auf folgende Weise berechnet werden kann: (3)

Es sei $z \in \mathbb{R}^m$ ein Vektor mit $z \neq 0$, für den die erweiterte Matrix $B = (A, z) \in \mathbb{R}^{m\times m}$ regulär ist. Dann erhält man aus den beiden Gleichungssystemen

$$u^\mathsf{T}\Big(A, z\Big) = \Big(0, 1\Big), \quad \Big(A, u\Big)\begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix} = b$$

die Kleinste-Quadrate-Lösung $\hat{x}$.

Abgabe: Freitag, 03.07.09, vor der Vorlesung