

Übungen zur NUMERIK I
 Zusatzblatt

Aufgabe 37 a) Betrachten Sie die Funktion $f(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - \frac{1}{x}$ für $x > 0$. Berechnen Sie die Konditionszahl κ_x . Wie verhält sich diese für $x \rightarrow 0$? Formulieren Sie den Ausdruck $f(x)$ so um, dass keine Auslöschung auftritt. (2)

b) Formen Sie den Ausdruck $\sqrt{x + \frac{1}{x}} - \sqrt{x - \frac{1}{x}}$ so um, dass seine Auswertung für $x \gg 1$ gutartig ist.

Aufgabe 38 a) Berechnen Sie das Newtonsche Interpolationspolynom p_2 vom Grad 2 zu den Werten (2)

$$\begin{array}{c|c|c|c} x_i & -1 & 1 & 2 \\ \hline y_i & 2 & 0 & 1 \end{array}$$

Bestimmen Sie außerdem das Interpolationspolynom p_3 vom Grad 3, das auch noch die Bedingung $p_3(3) = 4$ erfüllt.

b) Das Polynom p_2 interpoliere die Funktion $f(x) = \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ in den Stützstellen $x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 1$. Bestimmen Sie eine realistische Schranke für den Fehler $\max\{|p_2(x) - f(x)| : x \in [-1, 1]\}$. (Hilfswert: $\sinh 1 \leq 1.5$)

Aufgabe 39 Auf einem äquidistanten erweiterten Gitter mit Punkten $x_i = x_0 + ih, i = -3, \dots, n+3, h > 0, x_0 < 0 < x_n$, sei der Spline $s(x) = \sum_{i=-1}^{n+1} a_i B_i(x)$ aus S_3^2 mit Hilfe der B-Splines $B_i(x) = B_0(x - ih)$ definiert. Zeigen Sie: Wenn die Folge der Koeffizienten monoton wächst, $a_{-1} \leq a_0 \leq \dots \leq a_{n+1}$, dann gilt $s(x+h) \geq s(x)$ für $x \in (x_j, x_{j+1}]$, $0 \leq j < n$. (2)

Aufgabe 40 Gegeben sei die Matrix (2)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 6 \\ 4 & 6 & 13 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die LR-Zerlegung der Matrix A .

b) Berechnen Sie mit der LR-Zerlegung eine obere Schranke für $\kappa_\infty(A)$.

Hinweis: Es gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ a^2 & a & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ 0 & -a & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 41 Beim Gleichungssystem $Ax = b$ sei $b = (2, -4, 3)^\top$ und (2)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \\ -1 & 2 & -1 \\ & -1 & 2 \end{pmatrix}, \text{ mit } A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Konstante K in der Fehlerabschätzung

$$\frac{\|\tilde{x} - x\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq K \frac{\|\tilde{b} - b\|_\infty}{\|b\|_\infty}$$

aus der Vorlesung für das System $A\tilde{x} = \tilde{b}$, bei dem nur die rechte Seite gestört ist.

b) Konstruieren Sie einen Vektor $\tilde{b} = b + b' \neq b$, für den in dieser Schranke Gleichheit gilt.

Aufgabe 42 Zeigen Sie, dass bei jeder 2×2 -Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ mit $a_{11}a_{22} \neq 0$ für die (2)
Iterationsmatrizen B_G, B_E von Gesamt- und Einzelschrittverfahren gilt

$$\varrho(B_E) = \varrho(B_G)^2.$$

Aufgabe 43 Mit regulärer Matrix $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $z, b \in \mathbb{R}^n, \beta \in \mathbb{R}$, werde das überbestimmte (2)
Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} M \\ z^\top \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} b \\ \beta \end{pmatrix}$$

betrachtet. Zeigen Sie, dass mit $y^\top := z^\top M^{-1}$ die kleinste-Quadrate-Lösung $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ dieses Systems gegeben ist durch die Lösung des regulären Problems

$$Mx = b + \frac{\beta - y^\top b}{1 + \|y\|_2^2} y.$$

Abgabe für Leute mit weniger als 59 Punkten: Freitag, 10.07.09, **VOR** der Klausur
Klausurtermin: Freitag, 10.07.09, 09:15-11:45 Uhr, HG 113, Biegenstraße