

FoPra Numerik - Zusammenfassung der Ergebnisse

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Überblick	1
2	Diskussion der Diffusionsfunktionen	3
3	Auswahl der Testbilder und Vorstellung des Testverfahrens	5
4	Ergebnisse	8
5	Fazit	17

1 Einleitung

Das Ziel dieses Praktikums war das Testen verschiedener Diffusionsfunktionen im Rahmen der Anwendung von Diffusionsprozessen bei der Bearbeitung von Graubildern. Uns interessierte dabei vor allem die Bearbeitung von Bildern aus Ergebnissen numerischer Strömungssimulation. Die Grundlage für dieses Praktikum bildete die Diplomarbeit “Nichtlineare Diffusion: Theoretische Analyse und Anwendungen bei Strömungssimulationen” von Thomas Künzel (vgl. [Kün]) und speziell sein im Rahmen der Diplomarbeit geschriebenes Filterungsprogramm.

Diffusionsprozesse glättet das Bild, d.h. für einen “unendlichen Zeitverlauf” wird das Bild einheitlich grau: Genau in dem Durchschnittsgrauton des Ausgangsbildes. Ziel ist es nun, den Diffusionsprozess rechtzeitig zu stoppen, so dass starke Farbübergänge (starker Gradient der Funktion, die das Bild beschreibt) noch nicht geglättet wurden, leichte Farbübergänge (kleiner Gradient der Bild-Funktion) dagegen schon. Der Diffusionsprozess wird in mehreren Iterationsschritten durchgeführt (Diskrete Formulierung, vgl. dazu Kapitel 4, [Kün]).

1.1 Überblick

Das Grundproblem, das behandelt wird, ist die Bearbeitung bzw. Filterung von (Grau-)Bildern. Hierbei wird das Bild als Abbildung $f: [0, a_1] \times [0, a_2] \rightarrow \mathbb{R}$, $(x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2)$ behandelt. Das Bild wird nun als Anfangspunkt eines Diffusionsprozesses betrachtet, der durch folgende Differentialgleichung gegeben ist:

$$\begin{cases} \partial_t u = \operatorname{div}(g(|\nabla(u_\sigma)|^2) \cdot \nabla u) & \text{auf } \Omega \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = f(x) & \text{auf } \Omega \\ \partial_n u = 0 & \text{auf } \partial\Omega \times (0, \infty) \end{cases}$$

$g: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ ist die sogenannte Diffusionsfunktion. Hiermit hat man einen Filter, der ein Bild vom Gradienten abhängig glättet. Um beispielsweise Störungen im Originalbild aufzufangen, wird das Bild unter Verwendung einer Gaußfunktion noch vorgeglättet, so dass der letztendliche Filter durch diese Differentialgleichung dargestellt wird:

$$\delta_t u = \operatorname{div}(g(|\nabla(K_\sigma * u)|^2) \nabla u)$$

mit

$$K_{\sigma} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, K_{\sigma}(x) := \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{m/2}} \cdot \exp\left(-\frac{|x|^2}{2\sigma^2}\right), \sigma \in \mathbb{R}^+$$

Unsere Aufgabe war es, die Auswirkungen verschiedener Diffusionsfunktionen auf den Filterungsprozess anhand eigener und vorgegebener Testbilder zu untersuchen. Die verwendeten Diffusionsfunktionen wurden aus der wissenschaftlichen Arbeit “Diffusion-Inspired Shrinkage Functions and Stability Results for Wavelet Denoising” von Mrázek, Weickert und Steidl entnommen (vgl. [PM05]):

1. $g(|x|) = 1$
2. $g(|x|) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{|x|^2}{\lambda^2}}}$
3. $g(|x|) = \frac{1}{1 + \frac{|x|^2}{\lambda^2}}$
4. $g(|x|) = \begin{cases} 1 & |x| = 0 \\ 1 - \exp\left(\frac{-3.31488}{(|x|/\lambda)^8}\right) & |x| > 0 \end{cases}$ (Weikert-Diffusion)
5. $g(|x|) = \begin{cases} (1 - (|x|/\lambda)^2)^2 & |x| \leq \lambda \\ 0 & |x| \geq \lambda \end{cases}$
6. $g(|x|) = \frac{1}{|x|}$
7. $g(|x|) = \frac{1}{|x|^2}$
8. $g(|x|) = 2 \cdot \exp(-|x|^2/\lambda_1^2) - \exp(-|x|^2/\lambda_2^2), \lambda_1 < \lambda_2$

Die erste Diffusionsfunktion $g(x) = 1$ glättet das Bild unabhängig von dessen Grauwerten: Die Funktion ist unabhängig von dem Gradient. Wir haben daher nach der ersten Testphase die Diffusion Nr. 1 aus unserer Betrachtung ausgeschlossen. Die 6. und 7. Funktion nimmt für $|x| < 1$ Werte größer als eins an, für $|x| \searrow 0$ sind diese beiden Funktionen sogar unbeschränkt. Dies führte bei der Programmausführung zu einem Abbruch, so dass die Bilder nicht gefiltert wurden. Daher haben wir die Funktionen wie folgt geändert:

6. $g(|x|) = \begin{cases} \frac{1}{|x|}, & |x| \geq 1 \\ 1000, & |x| < 0.001 \end{cases}$
7. $g(|x|) = \begin{cases} \frac{1}{|x|^2}, & |x| \geq 1 \\ 1000000, & |x| < 0.001 \end{cases}$

Eigenschaften, auf die die Diffusionen untersucht werden sollten, waren:

1. Welche Auswirkungen hat die Parameterwahl?
2. Für welches Problem eignet sich welche Diffusion?
3. Wie reagieren die Diffusionen auf
 - Farbverläufe (farbige Bilder in Graubild umgewandelt)
 - Kanten

- Drehungen
- Geometrische Figuren
- verrauschte Bilder

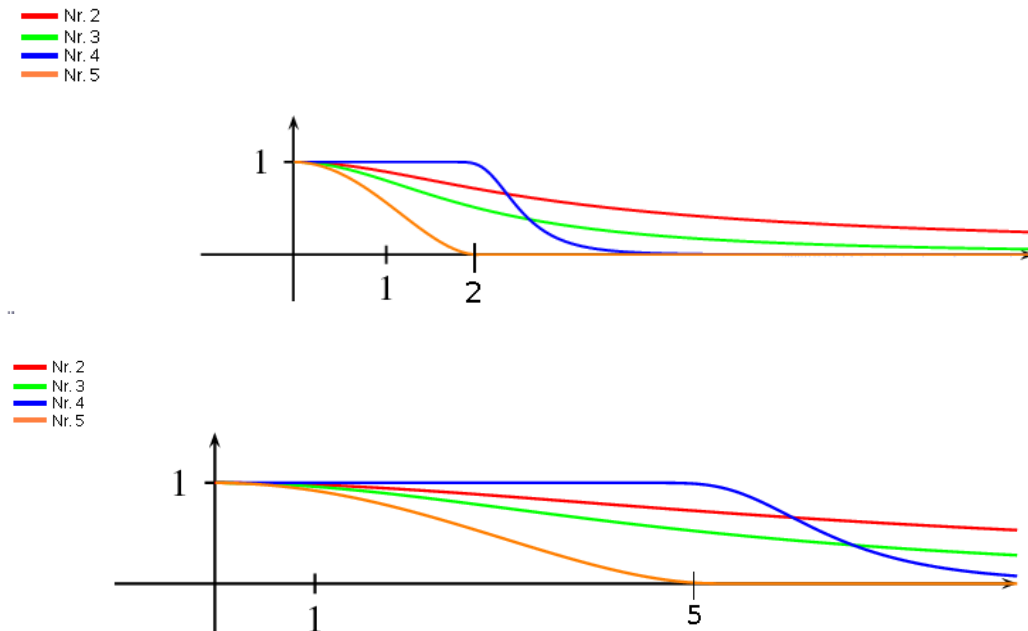
?

4. Wie "schnell" glätten die Diffusionen?

Im zweiten Kapitel diskutieren wir die Diffusionsfunktionen, im dritten Kapitel stellen wir die verwendeten Testbilder vor und erklären, welche Effekte wir beobachten wollten und erwartet haben. Zudem geben wir unsere Testverfahren an. Im vierten Kapitel stellen wir die Wirkung der Diffusionsfunktionen vor und bewerten diese. Im fünften Kapitel fassen wir unsere Arbeit nochmal zusammen.

2 Diskussion der Diffusionsfunktionen

Wir betrachten die Funktionen 2.)-5.) für $\lambda = 2.0$ und für $\lambda = 5.0$:



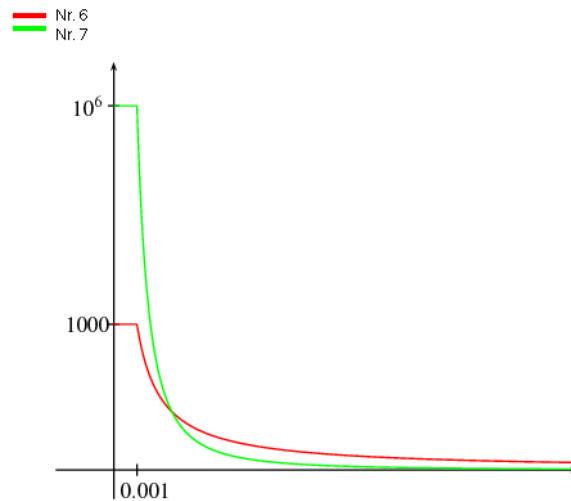
Besondere Merkmale sind:

- Die zweite Funktion fällt gleichmäßig, asymptotisch für $x \rightarrow \infty$ gegen 0 ab. Je größer λ gewählt wird, desto langsamer fällt die Funktion ab. Dies bedeutet: Ist der Gradient sehr groß, d. h. im Bild finden sich starke Kanten, so wird wenig geglättet.
- Die dritte Funktion zeigt ein ähnliches Verhalten wie die zweite. Allerdings fällt sie für alle $\lambda > 0$ schneller ab. Kanten werden also stärker berücksichtigt. Für große λ nähern sich beide Diffusionen aber an. Es gilt sogar für $x > 0$ fest:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{|x|^2}{\lambda^2}}} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{|x|^2}{\lambda^2}} = 1$$

- Die vierte Diffusion nimmt in Abhängigkeit von λ anfangs (d.h. für $x = 0$ bis zu einem Punkt x_0 der von λ abhängt) Werte nahe bei eins an: Bei kleinen Übergängen wird also stark geglättet. Je größer λ gewählt wird, desto "länger" nimmt diese Diffusion Werte nahe bei eins an. Wählt man also λ sehr groß, so werden sehr starke Kanten geglättet. Danach fällt die Funktion gleichmäßig ab, im ersten Graphen innerhalb des Intervalls $[4, 6]$, im zweiten Graphen innerhalb des Intervalls $[5, 8]$. Allgemein gilt: Je größer λ ist, desto größer ist die untere Schranke des entsprechenden Intervalls und die Intervalllänge. Für Werte größer als die rechte Intervallgrenze nimmt die Funktion Werte nahe bei 0 an, d. h. die rechte Intervallgrenze bestimmt den Wert für den Gradienten, ab dem nicht bzw. kaum geglättet wird.
- Die fünfte Diffusion fällt sehr schnell zu 0 ab, ab $x = \lambda$ ist die Funktion identisch 0. Wählt man λ sehr klein, so wird das Bild kaum geglättet. Nur für geringe Werte, d.h. für sehr kleine Grauwertdifferenzen wird geglättet. Je größer λ gewählt ist, desto langsamer fällt diese Diffusionsfunktion gegen 0.

Die 6te und 7te Diffusion diskutieren wir an dieser Stelle: Wir schauen uns zunächst die Funktionsgraphen der abgeänderten Funktionen an:



Für Werte zwischen 0 und 0.001 ist die Funktion konstant 1, d.h. für kleinere Werte werden die Farbübergänge stark geglättet. Für $x > 1$ fallen beide Funktionen gleichmäßig ab, Nr. 6 schneller als Nr. 7. Für $x \rightarrow \infty$, d.h. immer stärker Farbübergänge werden immer weniger geglättet, d. h. die Diffusionsfunktionen gehen für $x \rightarrow \infty$ gegen 0. Diese Funktionen sind unabhängig von λ .

Die 8te Diffusion betrachten wir für die Parameter $\lambda_1 = 2.0$ und $\lambda_2 = 5.0$:



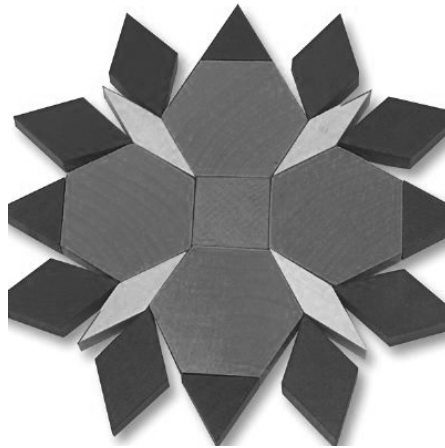
Diese Diffusion hat im Vergleich zu den anderen Funktionen eine spezielle Eigenschaft: Sie nimmt negative Werte an. Im Verlauf des Testens stellte sich heraus, dass hierdurch ein Rauschen im Bild erzeugt wurde (s. Diskussion in folgenden Kapiteln). Damit die Diffusionsfunktion nicht negativ wird, müssen also λ_1 und λ_2 möglichst groß und eng beieinander gewählt werden.

3 Auswahl der Testbilder und Vorstellung des Testverfahrens

In diesem Abschnitt stellen wir die einzelnen Testbilder vor. Wir haben dabei versucht für jede Fragestellung, wie sie in Kapitel 1 vorgestellt wurden, ein passenden Bild zu finden. Wir gehen bei den einzelnen Bildern auf die genauen Eigenschaften des Bildes ein:

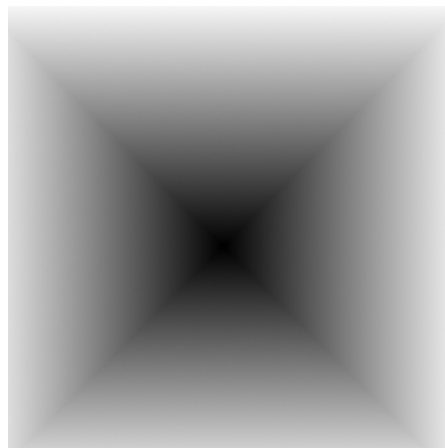
Testbild Nr. 1: Geometrie

Dieses Bild beinhaltet verschiedene geometrische Formen in verschiedenen Graustufen. Dabei sind sowohl starke als auch weiche Farbübergänge zu erkennen. Ziel war es, festzustellen, ob die Diffusionen die geometrischen Formen beibehalten werden und ob die Kanten beibehalten wurden. Zudem haben wir einen Glättungsprozess im inneren Bereich des Bildes erwartet.



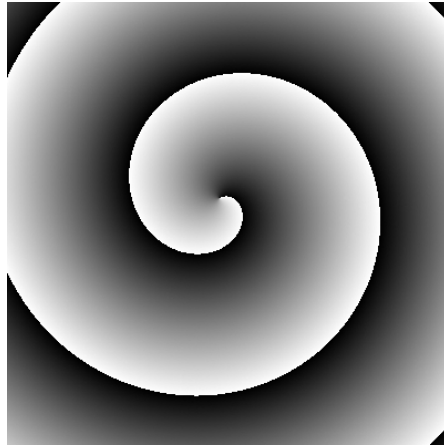
Testbild Nr. 2: Quadrat

Dieses Testbild stellt Farbverläufe da. Ziel war es festzustellen, inwiefern die Farbübergänge gelättet wurden.



Testbild Nr. 3: Spirale

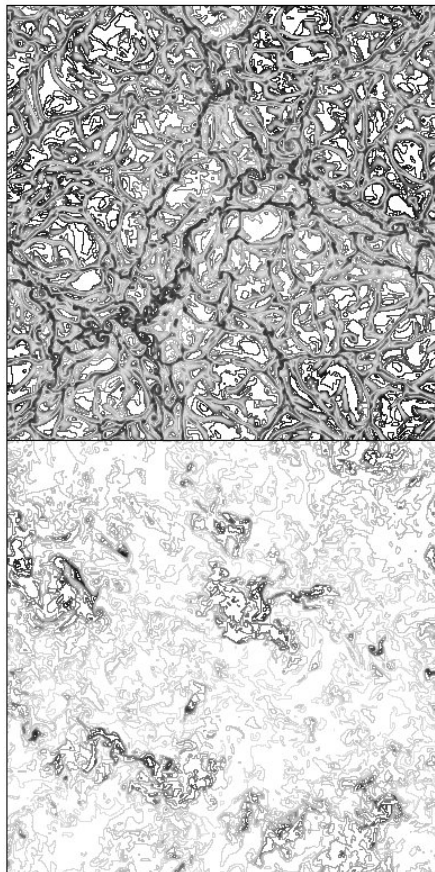
Die Spirale stellt ähnlich wie Testbild Nr. 2 Farbverläufe da, allerdings in einer anderen geometrischen Form. Die Frage war, ob die Ergebnisse ähnlich zu den vorigen war oder ob die andere Form einen Einfluss auf die Glättung hat.



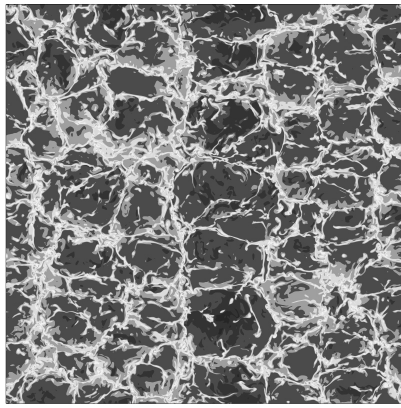
Testbild Nr. 4: Physik-Bilder

Hier haben wir aus der Physik bereitgestellte Bilder gefiltert. Die Diffusionen sollen bei diesen Bildern die starken Linien und Konturen bestehen lassen und die schwachen dünnen Linien glätten. Damit hat man ein unmittelbares Qualitätsmerkmal der Diffusionen vorliegen.

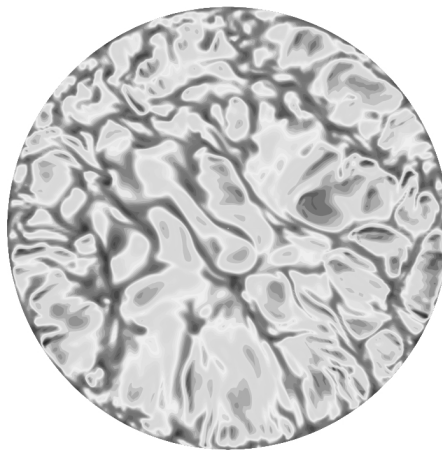
Physik-Bild 1



Physik-Bild 2



Physik-Bild 3



Testbild Nr. 5: sonstige

In dieser Kategorie fassen wir Bilder zusammen, bei denen sich eine grundlegende Eigenschaft der Diffusionsfunktion zeigten: Die Beibehaltung von starken Kanten. Dazu betrachten wir die beiden Bilder:



Mehrere der Testbilder wurden um 45° gedreht und dann gefiltert, um eventuell einen Unterschied zwischen Original- und gedrehtem Bild festzustellen, ein solcher war jedoch nicht zu erkennen.

Testverfahren:

Die jeweiligen “optimalen” Werte der Parameter der Diffusionsfunktionen hängen auch vom jeweils betrachteten Bild und Zweck der Filterung ab, deshalb haben wir die Diffusionen zunächst mit Standardparametern getestet.

Die Diffusionen Nr. 2,3,4 hängen von einem Parameter λ , die achte Diffusion von zwei Parametern λ_1 und λ_2 ab. Wir haben die Diffusionen 2,3,4 für folgende Werte getestet:

$$(1) \lambda = 2.0 \qquad (2) \lambda = 5.0 \qquad (3) \lambda = 10.0$$

Die achte Diffusion haben wir für die Werte

$$(1) \lambda_1 = 2.0, \lambda_2 = 5.0 \qquad (2) \lambda_1 = 2.0, \lambda_2 = 15.0 \qquad (3) \lambda_1 = 5.0, \lambda_2 = 8.0 \qquad (4) \lambda_1 = 10.0, \lambda_2 = 15.0$$

getestet. Aufgrund des hierbei auftretenden Rauschens der gefilterten Bilder haben wir noch Bilder mit folgenden Parametern gefiltert:

$$(5) \lambda_1 = 100.0, \lambda_2 = 105.0 \qquad (6) \lambda_1 = 100.0, \lambda_2 = 100.1$$

Dabei haben wir jeweils die Iterationsschritte 5, 15, 30 und 50 gewählt.

4 Ergebnisse

In diesem Abschnitt stellen wir die Ergebnisse der verschiedenen Tests vor und gehen auf die Fragen, welche wir in Abschnitt 1 vorgegeben haben, ein. Da dieses Dokument zu groß geworden wäre, hätten wir viele gefilterte Bilder mit akzeptabler Auflösung eingefügt, gibt es hier eine generelle Besprechung der Ergebnisse der einzelnen Diffusionsfunktionen, die anhand einzelner Beispielbilder gezeigt werden. Es existiert ein extra Testbild-Ordner auf einer CD, in dem viele gefilterte Bilder nach Diffusion und Parameterwert sortiert gesammelt sind.

Generell ist schon vorab zu sagen, dass die Testbilder Nr. 5 von allen Diffusionen nicht verändert wurden, also voneinander abgetrennte starke Kontraste nicht “verwischt” werden. Weiterhin ließ sich die Auswirkung der Diffusion auf die Farbverläufe der Testbilder 2 und 3 schlecht beurteilen da durch das vor der Filterung auf die Bilder angewendete Matlab-Skript dünne weiße Linien in den Farbverläufen erzeugt wurden, die durch alle Diffusionen, wie in Abbildung 1 zu sehen, in Wellen transformiert wurden (Ursache: Datei-Format?). Diese Wellen haben wir aber in unserer weiteren Betrachtung mit eingeschlossen, um zu beobachten, wie die Diffusionen die Wellen verändert haben.

Diffusion 1

Wie schon eingangs erwähnt, glättet die Diffusion in diesem Fall gleichmässig, unabhängig von den Gradienten – sprich den im Bild vorhandenen Kontrasten – war für unsere Betrachtungen also weniger nützlich.

Diffusion 2

Diese Diffusion glättet im Vergleich mit den anderen Diffusionen eher stark. Insbesondere ist die Glättung gleichmässiger als bei anderen Diffusionen, d. h. bei längerer Laufzeit des Algorithmus werden auch stärkere Kontraste geglättet. Insgesamt machen die Bilder nach einigen Schritten einen “verschwommenen”, “verwischten” Eindruck aufgrund der gleichmässigen Glättung. Interessant ist, dass eine Änderung des λ -Parameters keinen Unterschied bei den gefilterten Bildern erkennen lässt.

Beispielhaft deutlich werden diese Eigenschaften bei den folgenden Bildern.

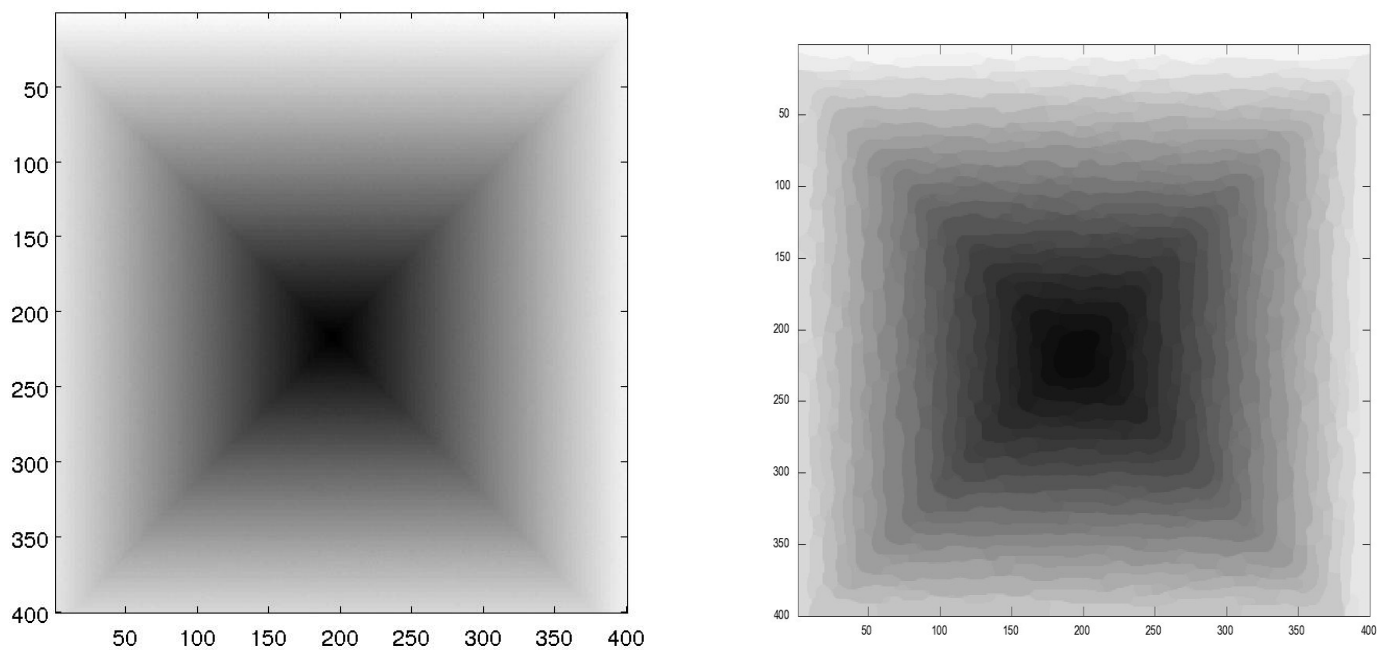
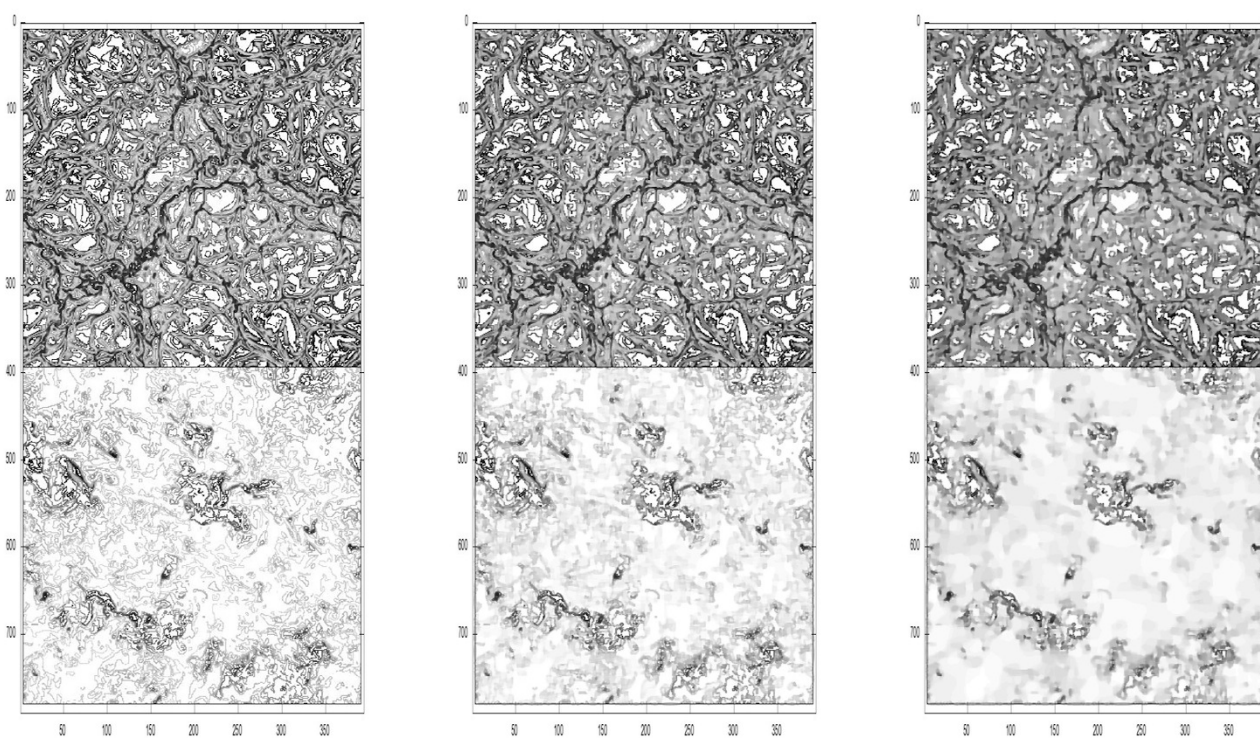
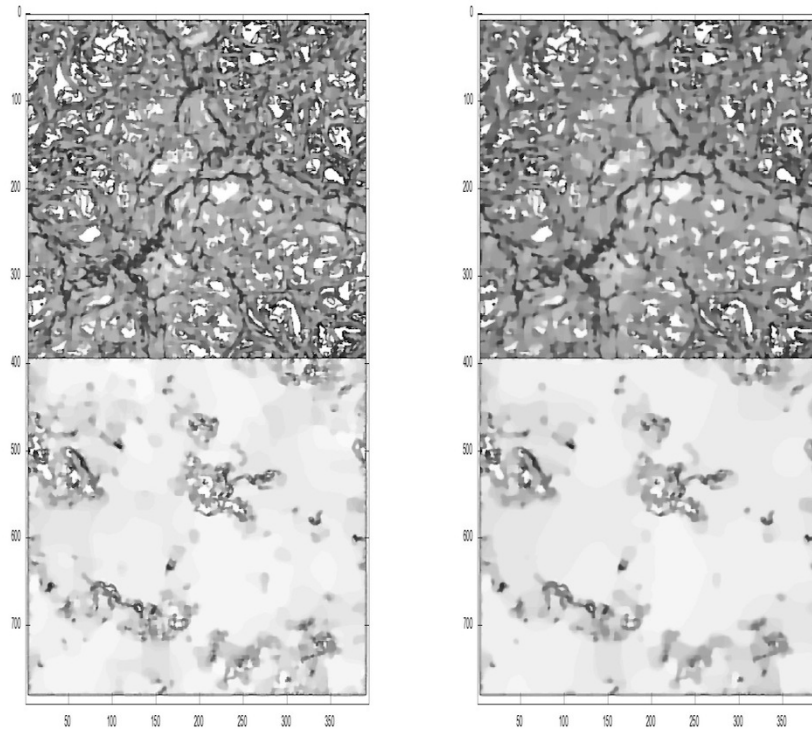


Abbildung 1: Links das Original nach Bearbeitung mit Matlab-Skript, rechts nach 50 Diffusionsschritten der 3. Diffusion mit $\lambda = 10.0$.

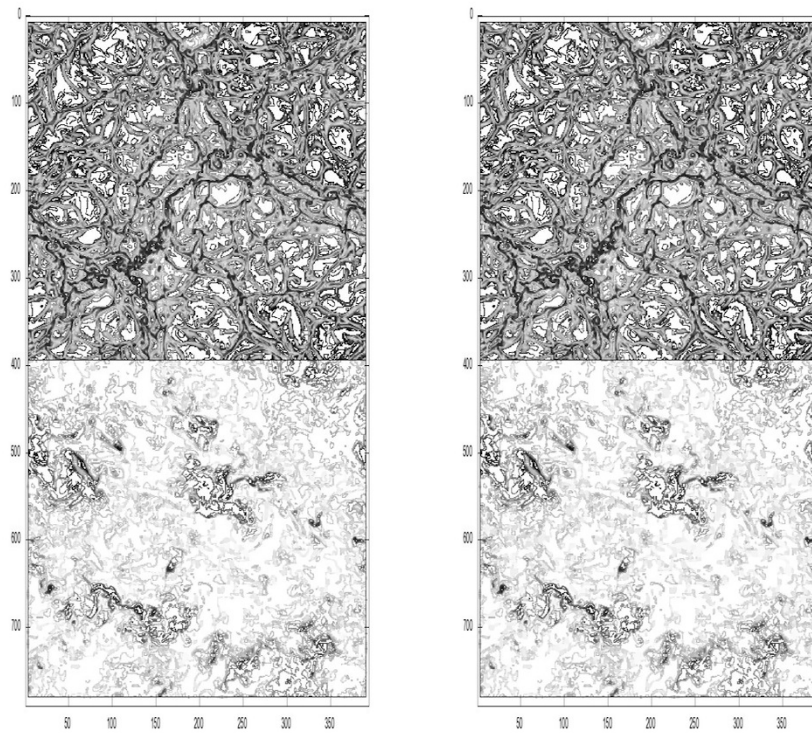
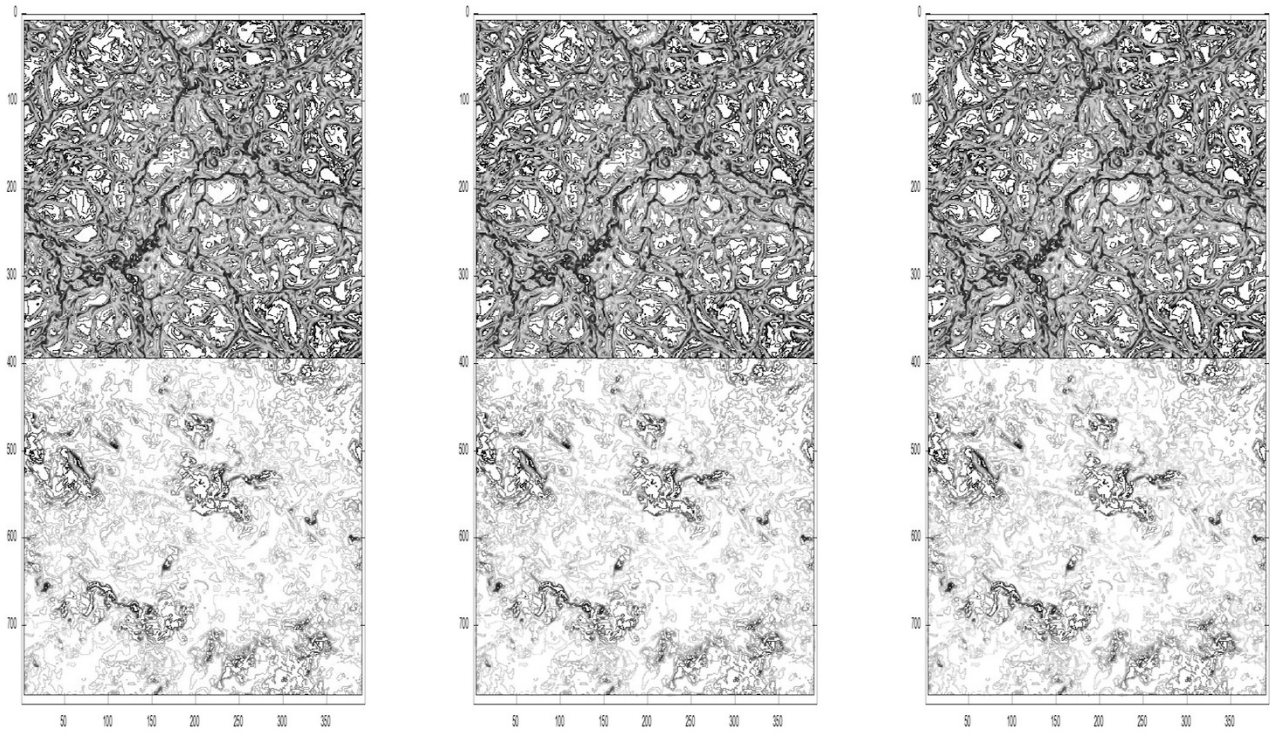




Nacheinander findet sich das Original-Bild, sowie die mit 5, 15, 30 und 50 Schritten gefilterten Bilder mit $\lambda = 5.0$. Schon nach 15 Schritten sind die kleinen Linien in der unteren Bildhälfte fast komplett weg, auch in der oberen Bildhälfte, in der die stärksten Kontraste sind, wird im Verlauf des Filterns viel geglättet. Nach 50 Schritten sieht das Bild generell sehr verschwommen aus.

Diffusion 3

Die dritte Diffusion glättet sehr viel schwächer als die zweite, nur bei sehr geringen Kontrasten sind Veränderungen bei den gefilterten Bildern zu erkennen. Auch die Wellenbildung bei den Farbverlauf-Bildern scheint etwas feiner zu sein als bei der zweiten Diffusion. Wie allerdings bei der zweiten Diffusion auch, lassen sich bei der dritten Diffusion keine nennenswerten Unterschiede erkennen, unter Umständen könnte bei sehr großen λ -Werten ($\lambda > 100$) etwas stärker gefiltert werden. Es folgt dasselbe Beispiel wie für Diffusion 2.



Es lassen sich selbst nach 50 Schritten keine besonderen Veränderungen ausmachen.

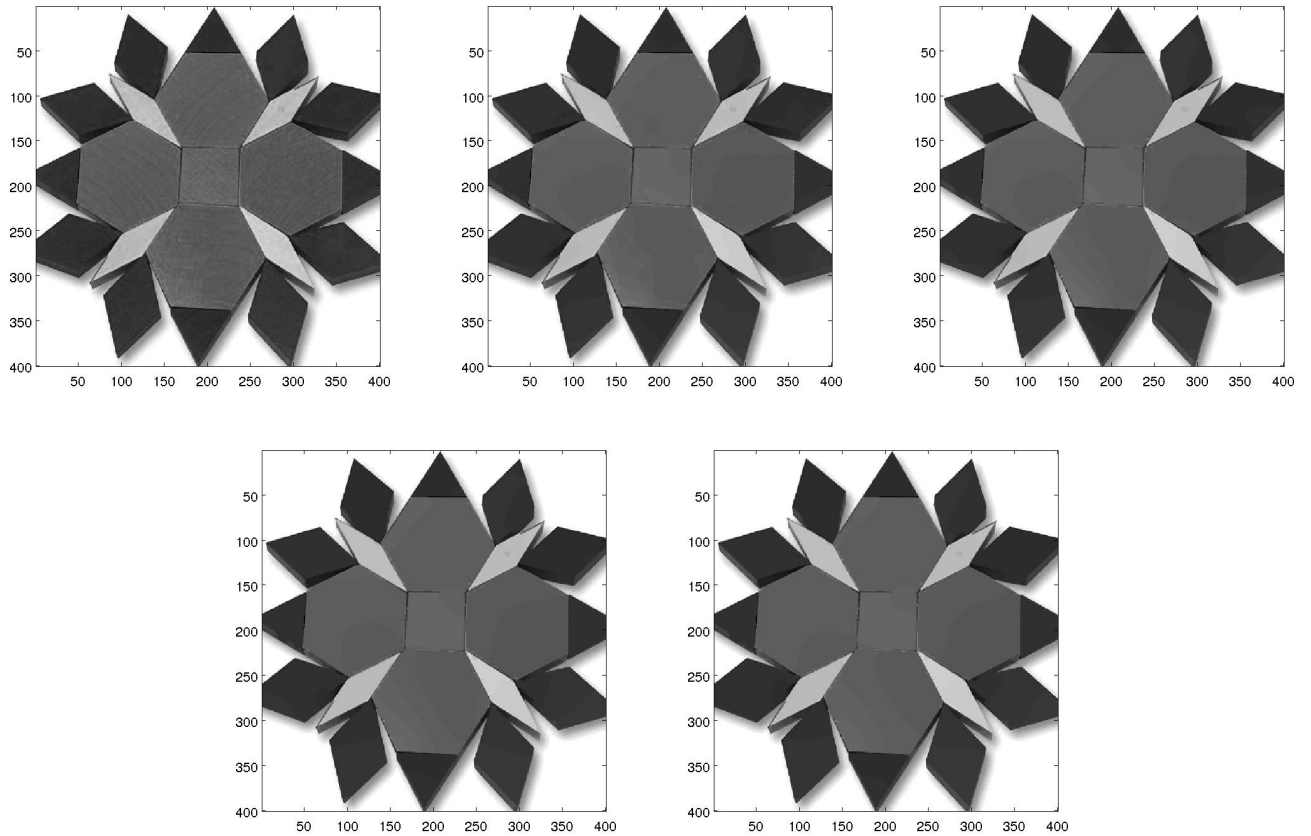
Diffusion 4

Bei der vierten Diffusion findet man zum ersten Mal eine starke Abhängigkeit vom Parameter λ vor. Wird für

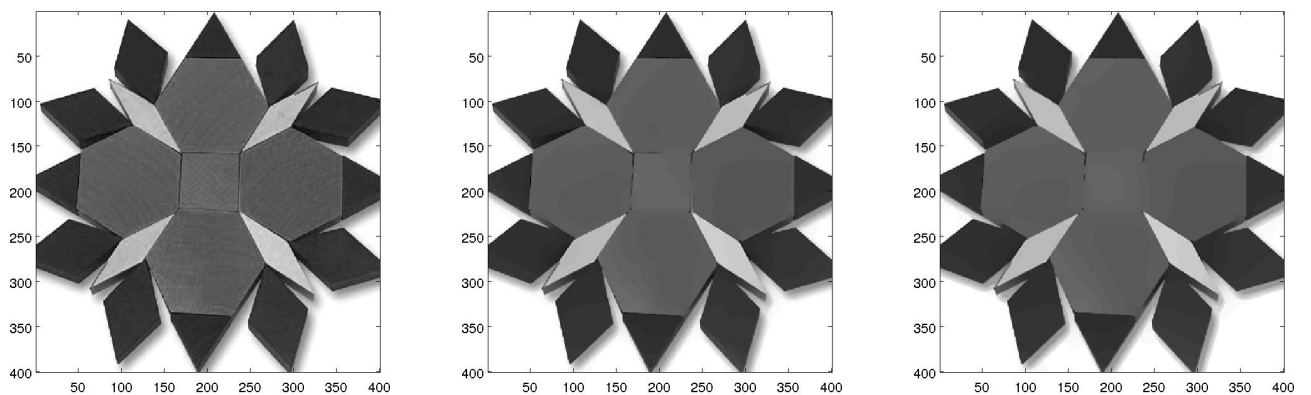
$\lambda = 2.0$ noch sehr wenig geglättet, lässt sich schon für $\lambda = 5.0$ nach wenigen Schritten eine starke Glättung beobachten. Diese ist allerdings weit weniger gleichmässig als bei Diffusion 2, so dass gröbere Strukturen beibehalten werden und die gefilterten Bilder nicht verschwommen wirken. Insgesamt ist es wohl die durch den λ -Paramter am sensibelsten einstellbare der hier betrachteten Diffusionen.

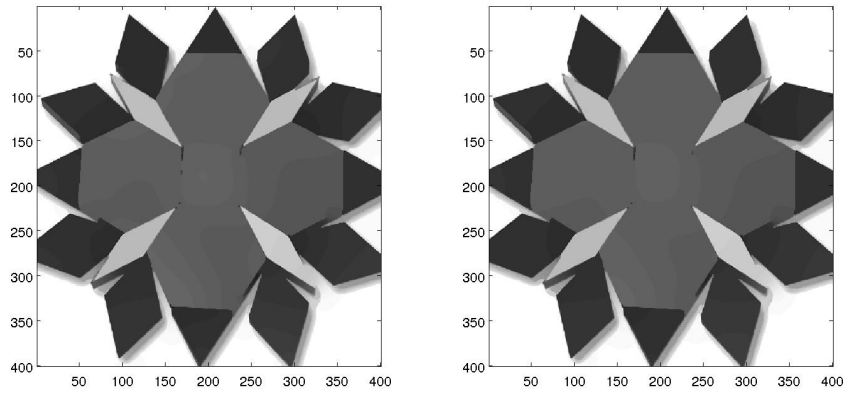
Als Beispiel, um die Unterschiede zu verdeutlichen, das Testbild Nr. 1 mit verschiedenen λ -Werten.

- $\lambda = 2.0$

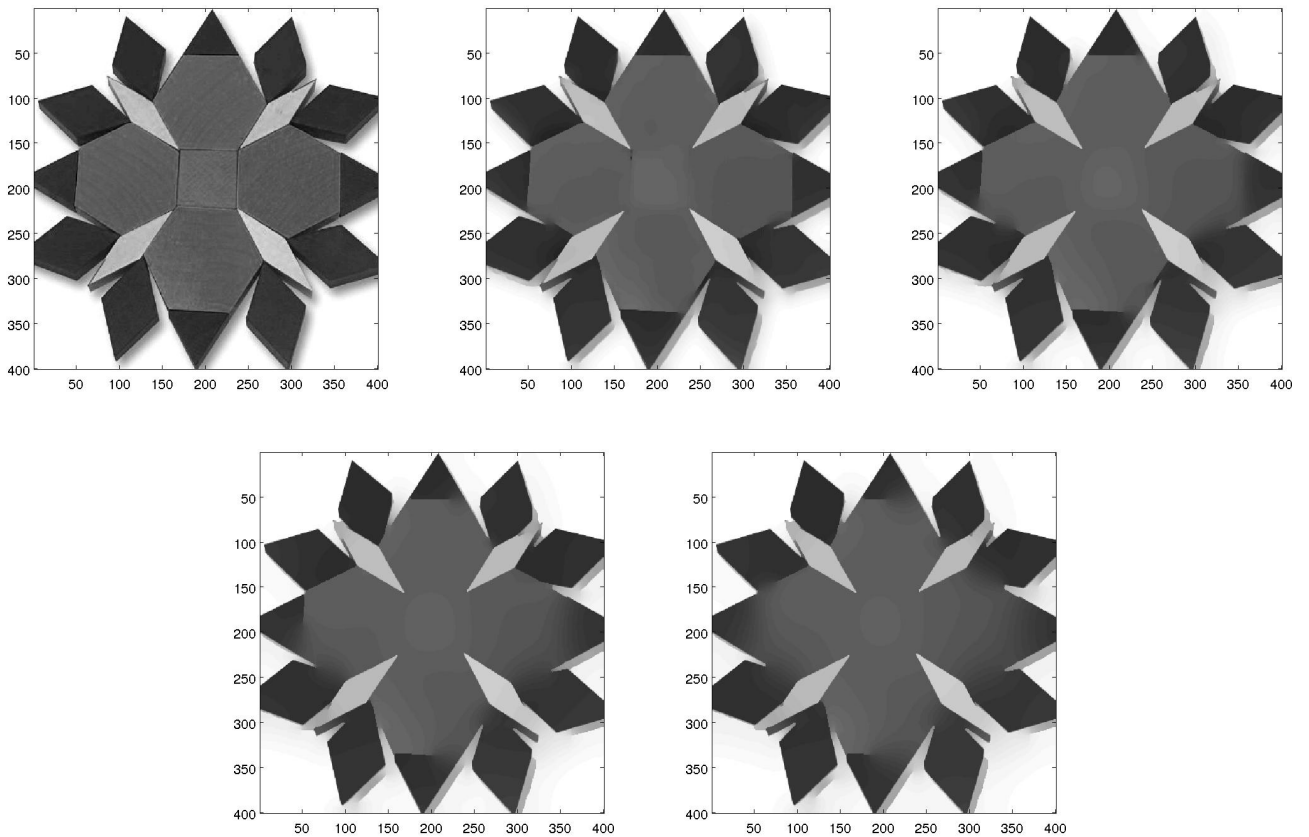


- $\lambda = 5.0$





- $\lambda = 10.0$

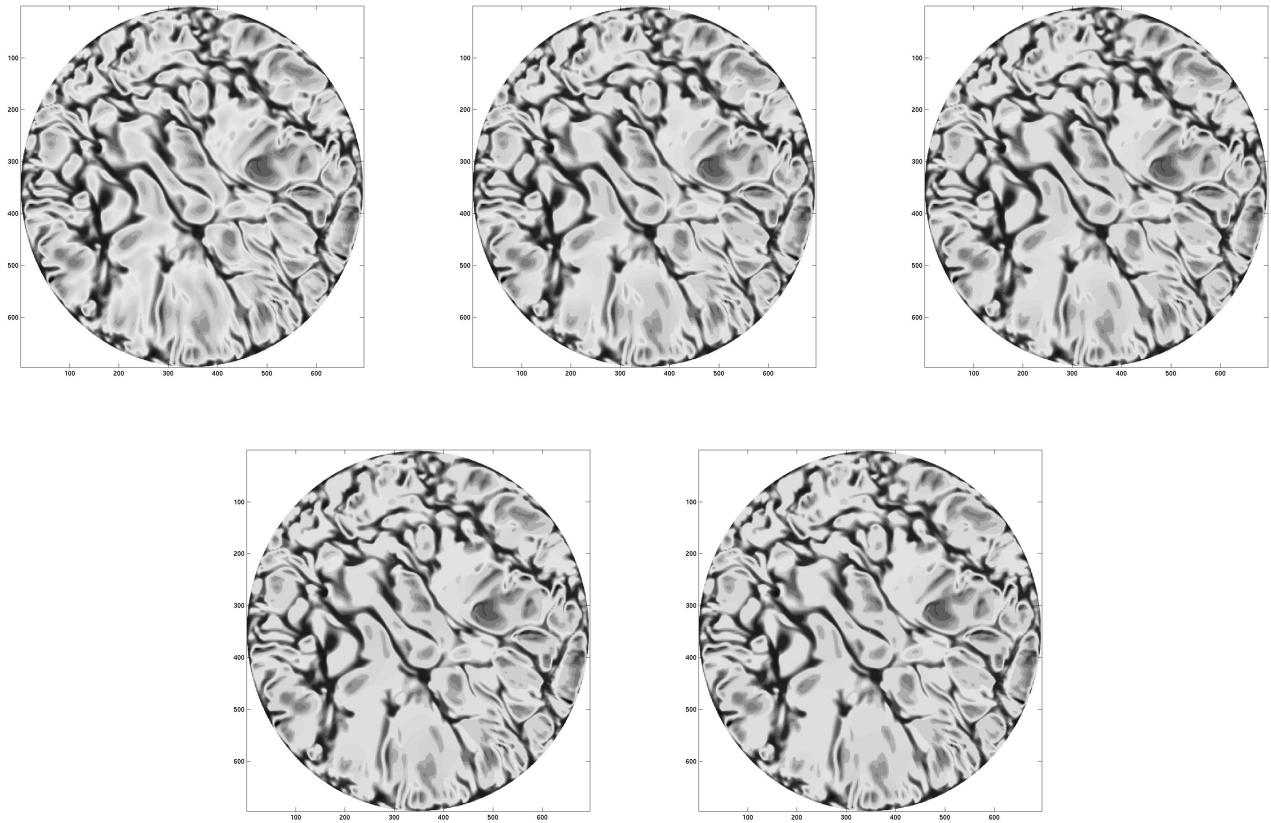


Hier sieht man, dass für $\lambda = 10.0$ nach 15 Schritten schon die größeren Strukturen anfangen, sich aufzulösen, während bei $\lambda = 5.0$ die kontrastreichen Grenzen auch nach 50 Schritten noch intakt sind und nur innerhalb dieser viel geglättet wird.

Diffusion 5

Die fünfte Diffusion ist die am schwächsten glättende Funktion von allen hier aufgeführten: Erst ab größeren λ -Werten lassen sich Veränderungen an wenig kontrastreichen Stellen der Bilder erkennen. In dieser Hinsicht ist Diffusion 5 von der Wirkung betrachtet mit Diffusion 3 zu vergleichen. Auch werden bei den Farbverläufen in geringerem Maße Wellen erzeugt.

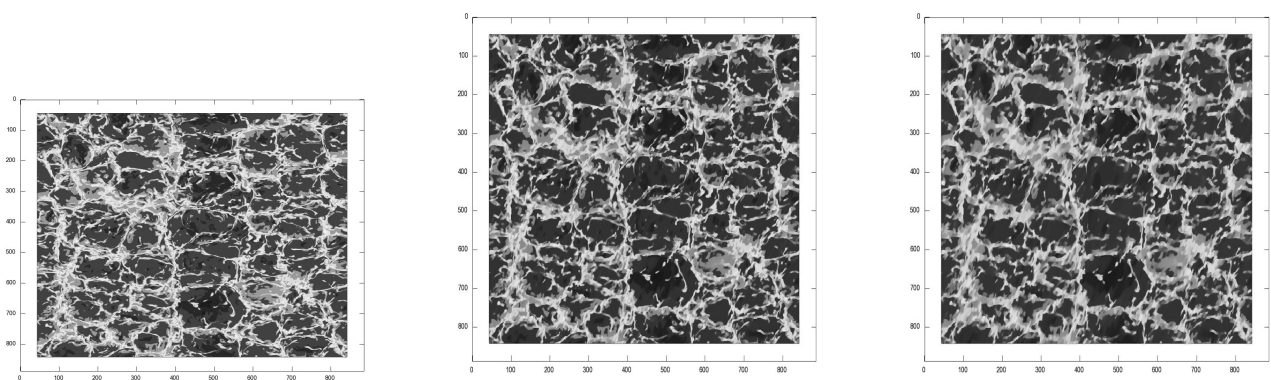
Um die geringe Glättung zu verdeutlichen folgt ein Beispiel für $\lambda = 100.0$.

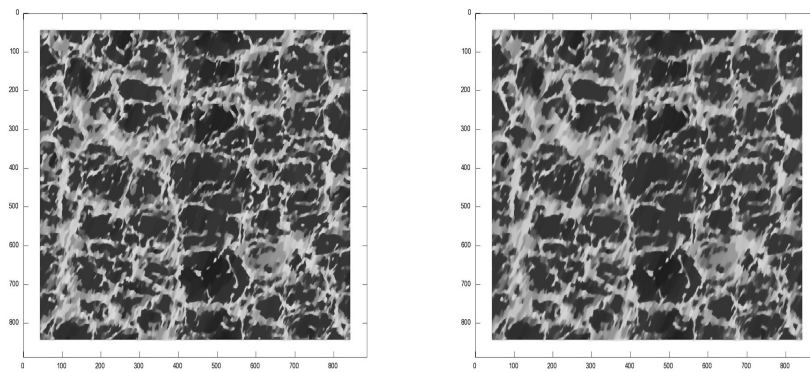


Selbst nach 50 Iterationen sind auch bei höherer Auflösung keine größeren Veränderungen sichtbar.

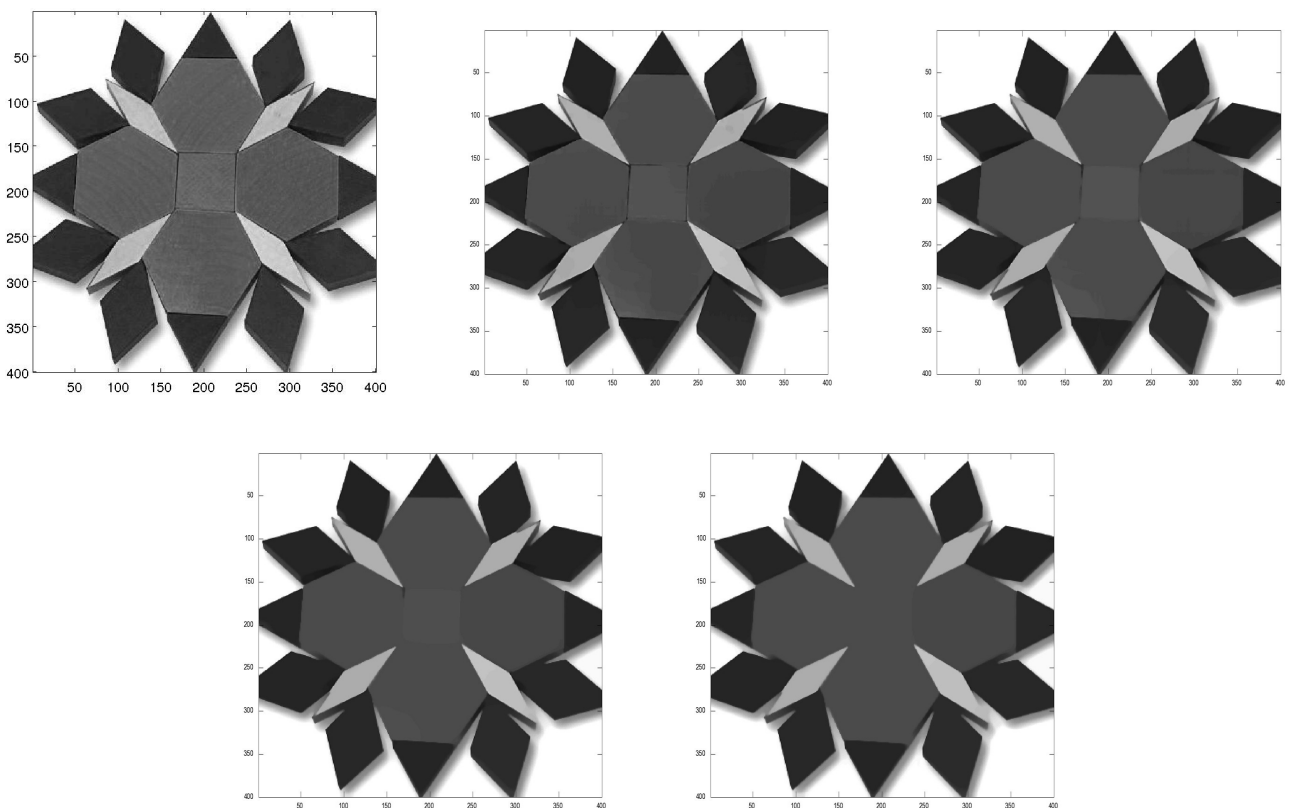
Diffusion 6

Diffusion 6 ist mit Diffusion 7 die einzige, die ohne speziellen Parameter nicht weiter feinjustiert werden kann. Etwas überraschend ist die nach Inspektion des Graphen in Abschnitt 2 nicht vermutete starke, gleichmässige Glättung (d.h. nicht sehr stark abhängig vom Gradienten der das Bild darstellenden Funktion) , die in folgendem Beispiel sehr deutlich zu “verwischten” Bildern führt.





Schon nach 15 Schritten ist das Bild bereits deutlich verwischt. Allerdings ist eine solche Verwischung nur bei feingliedrigen Strukturen zu beobachten, wie man an diesem Beispiel sieht:



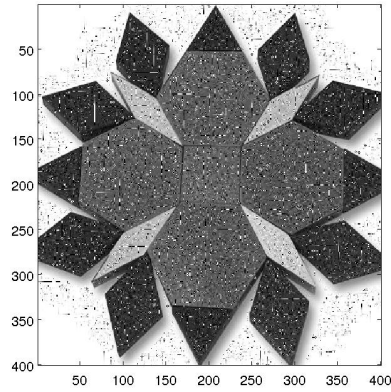
Obwohl der innere Bereich der Struktur nach 50 Schritten fast komplett denselben Grauwert hat bleibt die Struktur erhalten und es tritt kein “Verwischeffekt” auf.

Diffusion 7

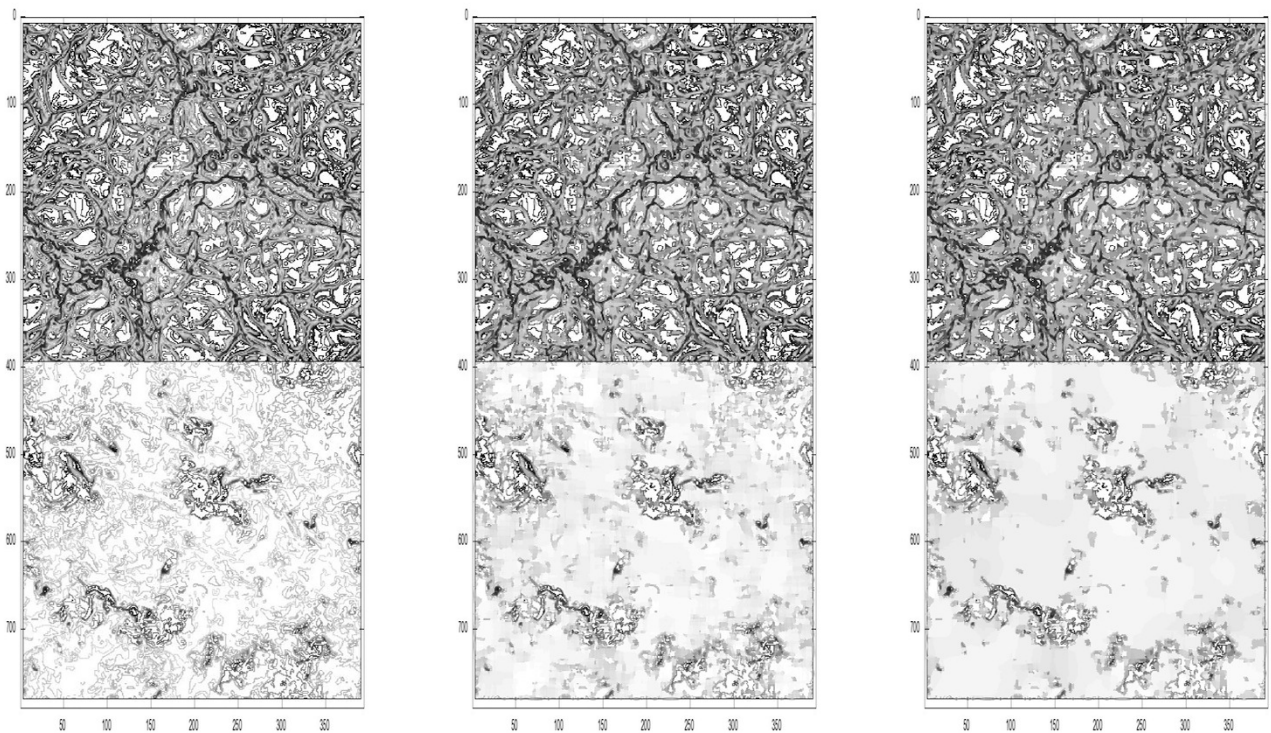
Wie schon aufgrund der Funktionsgraphen vermutet, glättet Diffusion 7 im Vergleich zu Diffusion 6 eher die weniger kontrastreichen Abschnitte der Bilder. Erwähnenswert ist in dem Fall nur der große Unterschied zwischen beiden Diffusionen, da selbst nach 50 Schritten bei dieser Diffusion ganz wenig geglättet wird. Dabei werden augenscheinlich keine Kanten verändert, sondern nur wenig kontrastreiche Flächen verändert. Die entsprechenden Bilder hierzu können im Testbild-Ordner eingesehen werden.

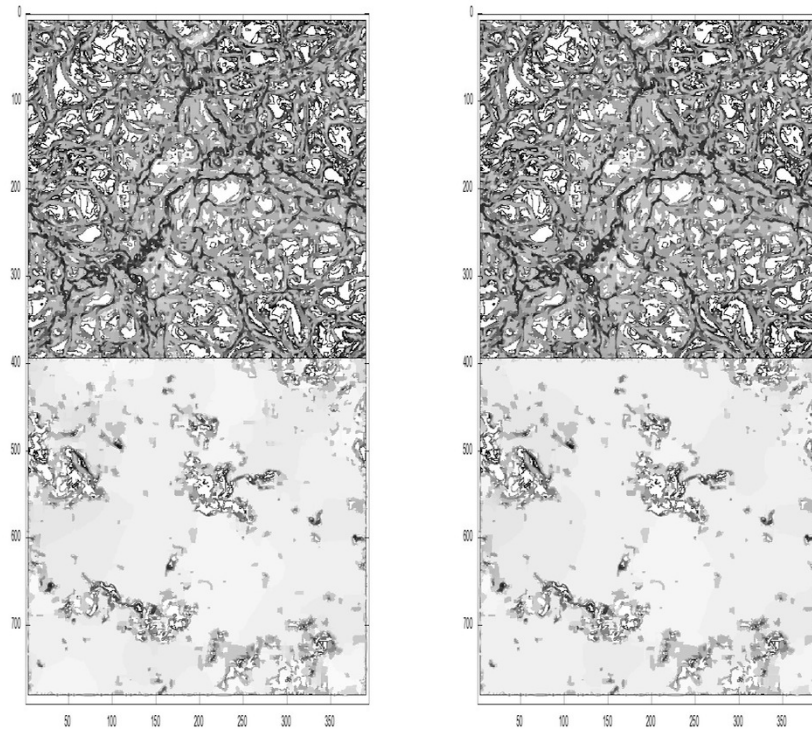
Diffusion 8

Wie schon in Abschnitt 2 erwähnt wurde bei kleineren λ_1, λ_2 -Werten bei den gefilterten Bildern ein Rauschen erzeugt, wie in diesem Beispielbild:



Dieses Rauschen kann durch große, eng beieinander liegende λ_1, λ_2 -Werte (z. B. $\lambda_1 = 100.0, \lambda_2 = 100.1$) vermieden werden (vgl. Funktionsgraph für entsprechenden Funktionen). In diesem Fall glättet die Diffusion bei geringen Kontrasten sehr stark, bei kontrastreichen Kanten allerdings kaum, wie man an folgendem Beispiel sieht.





Vor allem im unteren Bildbereich sind die wenig kontrastreichen, feinen Kanten nach 15 Schritten schon größtenteils verschwunden, während die etwas kontrastreichere Struktur noch gut definiert erhalten ist.

5 Fazit

In diesem Kapitel wollen wir unsere Ergebnisse zusammenfassen. Dabei gehen wir die einzelnen Diffusionsfunktionen durch und beschreiben die Eigenschaften, die sich gezeigt haben:

Nr. 2: $g(|x|) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{|x|^2}{\lambda^2}}}$

- Die Parameterwahl hatte hier einen vergleichsweise geringen Einfluss: Während bei anderen Diffusionen die Wahl von $\lambda = 2.0, \lambda = 5.0$ oder $\lambda = 10.0$ sehr unterschiedliche Ergebnisse geliefert hatte, waren die Ergebnisse hier fast identisch.
- Diese Diffusion glättet Flächen mit geringen Farbunterschieden. Stark kontrastreiche Kanten werden beibehalten. Allerdings werden dünne Kanten, wie z.B. bei Testbild Nr. 1, ebenfalls geglättet. Je nach Anwendung sollen diese Linien aber beibehalten werden.
- Dieser Diffusionsprozess glättet relativ schnell: Schon nach fünf Schritten sind erste Unterschiede zu erkennen. Nach etwas längerer Laufzeit wirkt das Bild verwischt.

Insgesamt: Diese Diffusion glättet relativ grob. Kleine, dünne Linien werden verwischt. Sollen bei einer Anwendung Feinheiten im Bild den Diffusionsprozess überstehen, ist diese Diffusion nur bei geringer Laufzeit anwendbar.

Nr. 3: $g(|x|) = \frac{1}{1 + \frac{|x|^2}{\lambda^2}}$

Diffusionsfunktion 3 erzeugt eine feinere Filterung. Der Einsatz lohnt sich nur bei Anwendungen, bei denen nur Flächen oder wenig kontrastreiche Details geglättet werden sollen. Es werden kaum Kanten verwischt. Ähnlich wie bei Diffusion 2 spielt die Parameterwahl keine große Rolle.

$$\text{Nr. 4: } g(|x|) = \begin{cases} 1 & |x| = 0 \\ 1 - \exp\left(\frac{-3.31488}{(|x|/\lambda)^8}\right) & |x| > 0 \end{cases}$$

- Hier spielte der Parameter λ eine wichtige Rolle. Dies verdeutlichen wir am Beispielbild "Geometrie": Für $\lambda = 2.0$ zeigt diese Diffusion ein ähnliches Verhalten wie Nr. 3: Die innere Fläche wird geglättet, die dünne Abgrenzung des Quadrats bleibt z.Tl. erhalten. Nach 50 Schritten beginnt aber die Verwischung dieser Linien. Erhöht man den Parameter auf $\lambda = 5.0$, so verschwinden die dünnen Linien bereits nach fünfzehn Schritten vollständig. Die geometrischen Formen bleiben aber beibehalten. Für $\lambda = 10.0$ werden diese nicht beibehalten. Die Diffusion glättet sehr stark und nach 50 Schritten ist kaum noch die Struktur des Bildes zu erkennen.
- Die Bilder werden schnell gelättet: Bereits nach fünf Schritten sind Veränderungen zu erkennen. Oft sind 50 Schritte sogar zu viele.

Insgesamt ist diese Diffusion aufgrund der starken Abhängigkeit vom Parameter λ wohl die flexibelste der hier untersuchten. Für ein sehr kleines λ zum "Feintuning" zu verwenden, allerdings bei etwas größerem Parameter relativ grob agierend.

$$\text{Nr. 5: } g(|x|) = \begin{cases} (1 - (|x|/\lambda)^2)^2 & |x| \leq \lambda \\ 0 & |x| \geq \lambda \end{cases}$$

Diese Diffusionsfunktion glättet sehr langsam: Selbst für große Parameter braucht man einige Iterationen, um Veränderungen festzustellen. Glättet teilweise noch weniger als Diffusion 3 und auch nur für ähnliche Anwendungen verwendbar.

$$\text{Nr. 6: } g(|x|) = \begin{cases} \frac{1}{|x|}, & |x| \geq 1 \\ 1000, & |x| < 0.001 \end{cases}$$

- Glättet sehr stark, wobei allerdings grobe Strukturen erhalten bleiben.
- Bei feineren Strukturen werden die Bilder relativ schnell verwischt.

Für detaillierte Bilder ist diese Diffusion kaum zu gebrauchen, da in dem Fall relativ schnell die Bilder verwischt werden. Bei Bildern mit groben Strukturen, in denen Flächen glatter gemacht werden sollen eher einsetzbar.

$$\text{Nr. 7: } g(|x|) = \begin{cases} \frac{1}{|x|^2}, & |x| \geq 1 \\ 1000000, & |x| < 0.001 \end{cases}$$

Sehr feine Diffusion, die die meisten Kanten klar definiert beibehält. Auch nur brauchbar, um kleine Änderungen bei den Bildern zu schaffen.

$$\text{Nr. 8: } g(|x|) = 2 \cdot \exp(-|x|^2/\lambda_1^2) - \exp(-|x|^2/\lambda_2^2), \lambda_1 < \lambda_2$$

- Erzeugt bei falscher Wahl der Parameter ein Rauschen in den Bildern.
- Mittelstarke Glättung bei kontrastarmen Bereichen der Bilder.

- Behält selbst bei längerer Laufzeit einen großen Teil der Struktur des Bildes bei, es werden wenig Kanten verwischt.

Eine der besten Diffusionen, wenn es darum geht, kontrastarme Bereiche eines Bildes gleichförmig zu machen und dabei die Struktur des Bildes ganz zu lassen. Auch bei stärkerer Glättung von Teilen des Bildes bleiben die meisten Kanten noch gut definiert.

Literatur

- [PM05] Gabriele Steidl, Pavel Mrázek, Joachim Weickert. Diffusion-inspired shrinkage functions and stability results for wavelet denoising. *International Journal of Computer Vision*, 64(2/3):171–186, 2005.
- [Kün] Thomas Künzel. Nichtlineare Diffusion: Theoretische Analyse und Anwendungen bei Strömungssimulationen.