



Fachbereich Mathematik & Informatik  
AG Numerik und Wavelet-Analysis  
Prof. Dr. S. Dahlke

## Fortgeschrittenenpraktikum

Abschlussbericht

# Nichtlineare Diffusion in der Bildverarbeitung

von

Rebecca Ramb

Betreuer: Ulrich Friedrich

Basierend auf:

- Thomas Künzel: *Nichtlineare Diffusion: Theoretische Analyse und Anwendungen bei Strömungssimulationen*, Diplomarbeit

# 1 Einleitung

Nichtlineare Diffusion ermöglicht in der Bildverarbeitung eine auf Partiellen Differentialgleichungen basierende Methode zur Filterung bzw. Glättung von Bildern. Hierbei geht es darum, gezielt die Teile eines Bildes zu erkennen, die eine tragende Information enthalten, und anschließend den Rest mittels nichtlinearer Diffusion zu entzaubern. Vereinfacht bedeutet dies, dass „unwichtige“ Informationen „verwischt“ werden, wobei „wichtige“ Informationen wie die Kanten und Konturen in einem Bild erhalten bleiben sollen. Die Festlegung der Bereiche von wichtigen und unwichtigen Informationen hängt ganz von der Wahl der Art der Filterung, der Diffusion und den zugehörigen Parametern ab. Bevor das gewünschte Ergebnis bei der Bearbeitung eines Bildes erreicht werden kann, muss also klar sein, wie die Filterung durchzuführen ist. Aus diesem Grund ist es wichtig, die Auswirkungen der verschiedenen Filter-, Diffusionsarten zusammen mit der Wahl der Parameter genau zu betrachten.

Dieses Fortgeschrittenenpraktikum basiert auf der Diplomarbeit von Thomas Künzel, der sich intensiv mit der Theorie und der Implementierung des nichtlinearen Diffusionsfilter von Catte, Lions, Morell und Coll auseinandergesetzt hat. Ziel dieser Arbeit ist die Untersuchung der Parameterabhängigkeiten bezüglich des vorliegenden Bildes (grau oder Farbe) und der Art der Filterung (isotrop oder anisotrop). Hierbei werden als Diffusionsfunktionen hauptsächlich die lineare Diffusion und die Weickert-Diffusivität betrachtet. Die Tests der Ergebnisse mit verschiedenen Parametern erfolgten mittels des von Thomas Geiger geschriebenen Filterprogramms, welches eine graphische Oberfläche für isotropes und anisotropes Filtern von Grau- oder Farbbildern bereitstellt.

Im Folgenden werden zunächst kurz die Grundlagen des isotropen und anisotropen Filterns erklärt. Den Hauptteil bildet anschließend die Untersuchung von Parameterwahlauswirkungen. Die Darstellung der Parameterwertefestlegung erfolgt anhand konkreter Beispiele und ist in Unterabschnitte für isotropes und anisotropes Filtern aufgeteilt. Hierbei soll ein praktisches Verständnis für Parametergrenzen und Wechselwirkungen vermittelt werden, um Ergebnisse nach gewünschten Kriterien zu erhalten. Weiterhin erfolgt einerseits eine direkte Gegenüberstellung der isotropen und anisotropen Filterung in der der Arbeit zugrundeliegenden Umsetzung, andererseits die Besprechung einer möglichen Kombination beider Filterungsarten. Abschließend folgt eine Zusammenfassung mit einem Fazit der Arbeit und einem Ausblick.

## 2 Grundlagen

Dieser Abschnitt dient einer Vermittlung der wichtigsten Grundlagen bei einem Filterungsvorgang. Ein gewisses Grundverständnis für die Idee des Filterns sowie die Unterschiede zwischen isotroper und anisotroper Filterung sind wichtig, um die Bedeutung einzelner Parameter im gesamten Filterungsprozess zu verstehen.

### 2.1 Die Idee des Filterns

Bei einer Filterung im Bereich der Bildverarbeitung wird das zugrundeliegende Bild als Abbildung betrachtet, bei der jedem Bildpunkt ein reeller Wert, der Grauwert des Bildes, an dieser Stelle zugeordnet wird. Für das Bild soll jetzt an jeder Bildpunktstelle entschieden werden, ob eine Diffusion stattfinden muss oder nicht und, falls es zu einer Diffusion kommt, dann wie stark. Der Filter gibt in Abhängigkeiten von den gemachten Angaben dann zu jedem Bildpunkt einen neuen reellen Wert zurück, den neuen Grauwert des Bildes an dieser Stelle nach der Diffusion. Das Prinzip des Filterns besteht also darin, die Konzentrationsunterschiede in den einzelnen Bildpunkten zu bestimmen und bei hinreichend kleinen Ergebnissen eine Verwischung durch Diffusion zu starten. Ist der Konzentrationsunterschied sehr groß, liegt aller Wahrscheinlichkeit nach eine Kante vor und es sollte keine Diffusion stattfinden.

Diffusion selbst ist ein Prozess, bei dem Konzentrationsunterschiede ausgeglichen werden ohne dabei die Gesamtheit der Masse zu verringern oder zu erweitern. Das bedeutet, Diffusion kann gesehen werden als ein Fluss von Teilchen, der sich in dem zur Verfügung stehenden Raum langsam gleichmäßig verteilt bis der Ausgleich hergestellt wurde, ohne dass dabei die Gesamtzahl der Teilchen zunimmt oder weniger wird. Zu jedem Zeitpunkt  $t$  lässt sich an jedem Ort  $x$  eine bestimmte Konzentration  $u(x, t)$  feststellen. Die Diffusionsgleichung, die diesen Prozess ausdrückt, ergibt sich durch die Ausgleichseigenschaft (*Ficksches Gesetz*) und die Erhaltung der Masse (*Kontinuitätsgleichung*) :

$$j = -D\nabla u \quad (\text{Ficksches Gesetz})$$

$$\delta_t u = -\operatorname{div} j \quad (\text{Kontinuitätsgleichung})$$

Das in der Ausgleichseigenschaft auftretende  $D$  bezeichnet den Diffusionstensor, welcher den Zusammenhang zwischen Konzentrationsunterschied  $\nabla u$  und Ausgleichsfluss  $j$  bildet. Setzt man diese beiden Formeln zusammen, erhält man die Diffusionsgleichung, die den Prozess der Diffusion ausdrückt und die Konzentration zu einer bestimmten Zeit an einem bestimmten Ort enthält:

$$\delta_t u = \operatorname{div}(D\nabla u)$$

Die Diffusionsgleichung zusammen mit der Festlegung der Randbedingungen ergeben eine partielle Differentialgleichung, die die Konzentration zu einer bestimmten

Zeit an einer bestimmten Stelle darstellt. In der Filterung wird letztendlich durch numerische Approximation diese partielle Differentialgleichung gelöst mit dem ursprünglichen Bild als Startwert.

Die Wahl des Diffusionstensors  $D$  bildet eine entscheidende Rolle bezüglich des Ergebnisses der Filterung. Wählt man  $D$  in geeigneter Weise, kann die Filterung nach den eigenen Wünschen gesteuert werden. Je nachdem, ob  $D$  in Abhängigkeit zur Zeit ist oder nicht, spricht man von linearer oder nichtlinearer Diffusion. Je nachdem, ob  $D$  vom Ort abhängt, von homogener oder nicht homogener Diffusion. Falls der Konzentrationsunterschied und der Ausgleichsfluss parallel verlaufen, bezeichnet man die Diffusion als isotrop, im anderen Fall spricht man von anisotroper Filterung.

## 2.2 Isotropes Filtern

In der Bildverarbeitung muss also jetzt zu jedem Bildpunkt ermittelt werden, in welche Richtung der Ausgleichsfluss erzeugt werden muss, abhängig von der Grauwertkonzentration an dieser Stelle. Hierzu wird durch  $|\nabla u|^2$  die Richtung des stärksten Anstiegs in diesem Bildpunkt ermittelt. Es hat sich allgemein als sinnvoll erwiesen, nicht das Bild selbst zur Berechnung der Gradienten zu benutzen, sondern eine gleichmäßig vorgeglättete Version des Bildes. Hierbei wird für ein bestimmtes Zeitintervall das Bild zunächst ohne Berücksichtigung einzelner Bildstrukturen gefiltert und das Ergebnis dient anschließend zur Berechnung der Gradienten, um zu große Gradienten zu vermeiden und Sprünge auszuschließen. In der Theorie bedeutet dies lediglich, dass  $|\nabla u_\sigma|^2$  stattdessen verwendet wird, wobei  $u_\sigma$  die Faltung mit der Gaußkurve bildet.

$$u_\sigma := K_\sigma \cdot u \quad K_\sigma(x) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{n}{2}}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{2\sigma^2}\right)$$

Weiterhin verlaufen beim isotropen Filter Konzentrationsunterschied und Ausgleichsfluss parallel, weswegen der Ausgleichsfluss jetzt also entgegen der Richtung des stärksten Anstiegs erzeugt wird. Mittels dieser Informationen kann jetzt ein Diffusionstensor erstellt werden. In dieser Arbeit interessieren hauptsächlich die lineare Diffusion und die Weickert-Diffusion. Letztere hatte sich in der Arbeit des vorangegangenen Fortgeschrittenenpraktikums als besonders geeignet herausgestellt.

## 2.3 Anisotropes Filtern

In der Anisotropen Filterung wird der in der Diffusionsgleichung auftretende Diffusionstensor nun durch eine Matrix ersetzt. Der Ausgleichsfluss verläuft jetzt nicht mehr notwendigerweise parallel zum Konzentrationsunterschied. Der wichtigste Unterschied ist daher, dass wir zu jedem Bildpunkt nicht mehr nur die Richtung des stärksten Anstiegs, also den Gradienten, sondern dazu jetzt auch noch die orthogonale Gegenrichtung betrachten. In der anisotropen Filterung erhalten wir aufgrund

der Betrachtung von  $\nabla u_\sigma$  und der orthogonalen Gegenrichtung  $\nabla u_\sigma^t$  eine Matrix  $J_0(\nabla u_\sigma)$  mittels derer wir punktuelle Informationen bekommen, die wir im nächsten Schritt auf Informationen einer Umgebung des Bildpunktes erweitern.

$$J_0(\nabla u_\sigma) := \nabla u_\sigma \otimes \nabla u_\sigma = \nabla u_\sigma (\nabla u_\sigma)^T \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

Auf der Matrix  $J_0(\nabla u_\sigma)$  wird anschließend komponentenweise eine Faltung mit der Gaußkurve durchgeführt, abhängig vom Strukturparameter  $\rho$ . Dabei entsteht eine veränderte Matrix, die nun nicht mehr nur punktuelle Informationen enthält, sondern eine von  $\rho$  abhängige Umgebung miteinbezieht.

$$J_\rho(\nabla u_\sigma) := K_\rho * J_0(\nabla u_\sigma) \quad K_\sigma(x) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{n}{2}}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{2\sigma^2}\right)$$

Aus den Eigenvektoren der Matrix  $J_\rho(\nabla u_\sigma)$  werden die sogenannte Kontrastrichtung und die Normalenrichtung ermittelt. Für diese beiden Richtungen lassen sich in der anisotropen Filterung Diffusivitäten bestimmen, mit denen hier gefiltert wird.

Im Vergleich zur isotropen Filterung werden also jetzt zwei Diffusionsfunktionen bestimmt: Eine entlang der Kontrastrichtung und eine entlang der Normalenrichtung. Anschaulich stehen daher nun zwei Richtungen zur Verfügung entlang derer unterschiedlich Diffusion stattfinden kann. Die Idee hierbei ist eine Entrauschung auch auf den im Bild auftretenden Kanten zu ermöglichen. Bei der alleinigen Betrachtung der Richtung des stärksten Anstiegs tritt aufgrund der Größe der Gradienten bei Kanten keine Filterung auf. Jetzt soll zwar entlang der Kante in Kontrastrichtung bei anisotroper Filterung ebenfalls keine Diffusion erfolgen, jedoch soll auf der Kante selbst in Normalenrichtung eine Verwischung zur Entrauschung der Kante stattfinden.

In der folgenden Arbeit wurden in der anisotropen Filterung stets die Weickert-Diffusion in Kontrastrichtung und die lineare Diffusion in Normalenrichtung verwendet.

### 3 Isotropes Filtern

In diesem Abschnitt soll ein praktisches Verständnis für die Auswirkungen der Parameterwahl beim isotropen Filtern vermittelt werden. Ein Beispielbild aus der Physik zusammen mit gewünschten Filterungszielen dienen hierbei als Grundlage der Untersuchung.

#### 3.1 Parameter und Filterungsziele

Folgende Parameter treten bei der isotropen Filterung auf:

- Diffusionsfunktion
- Parameter der gewählten Diffusionsfunktion
- Vorglättungsparameter  $\sigma$
- Zeitschrittbreite  $\tau$
- Iterationszahl

Die hier gewählte Diffusionsfunktion ist die Weickert-Diffusivität mit Parameter  $\lambda$ . Das Beispielbild dieses Abschnitts ist das Physikerbild *No1*:

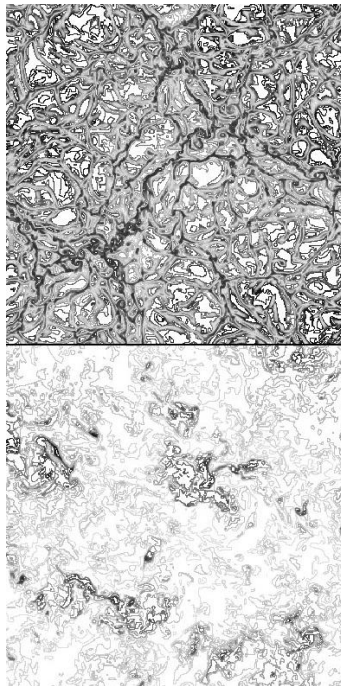


Abbildung 1: Physikerbild No1

Zu den Merkmalen des Physikerbildes *No1* zählt das Vorhandensein vieler harter Kanten in Form von linienartigen Strömungen. Die verschiedenen kontrastreichen Strukturen liegen relativ nah beieinander, wobei schwarze und weiße Pixel oftmals direkt nebeneinander liegen. Besonders im unteren Teil des Bildes lassen sich klar inselartige Strukturansammlungen erkennen, während die helleren Strukturen, um die Inseln herum liegend, eher in den Hintergrund treten.

Das Filterungsziel bei diesem Bild bildete hierbei den Erhalt der inselartigen Vordergrundstrukturen mit gleichzeitiger Verwischung der helleren Strukturen zu einem einheitlich gefärbten Hintergrund. Das bedeutet, dass insbesondere im unteren Teil die dunkleren Strukturen unberührt bleiben sollten, während der Grauwert in den restlichen Bezirken durch Diffusion vereinheitlicht werden sollte.

Durch eine geeignete Wahl der Parameter konnte das Filterungsziel umgesetzt werden mit folgendem Filterungsergebnis:

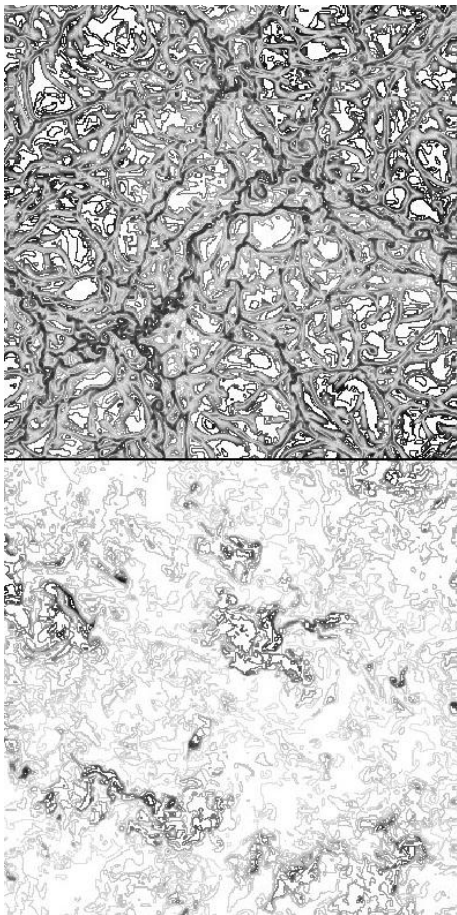


Abbildung 2: *No1* vor der Filterung

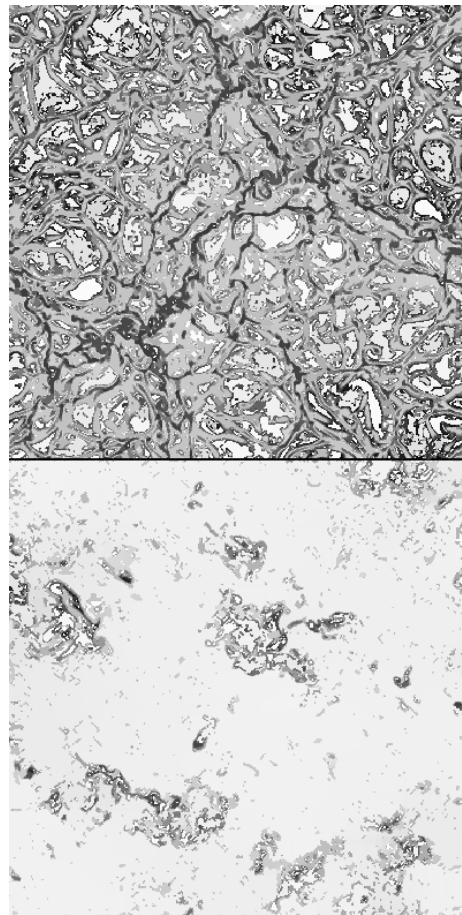


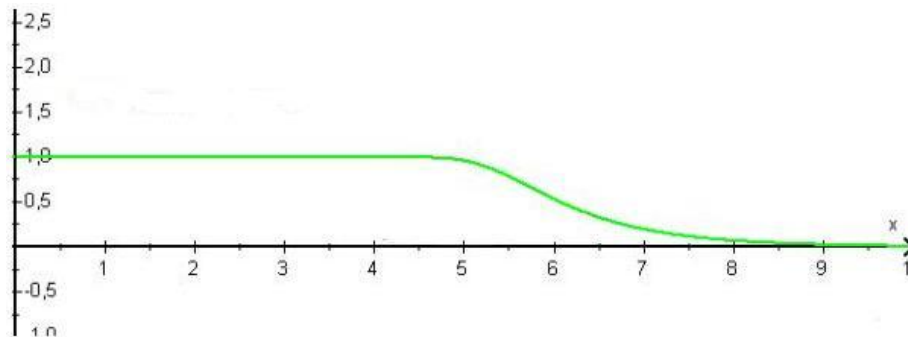
Abbildung 3: *No1* nach der Filterung

### 3.2 Die Weickert-Diffusion mit Diffusionsparameter $\lambda$

Wie bereits beschrieben wird in dieser Arbeit die Weickert-Diffusion mit zugehörigem Diffusionsparameter  $\lambda$  verwendet. Dazu sei erwähnt, dass im vorangegangenen Fortgeschrittenenpraktikum verschiedene Diffusivitäten getestet wurden, wobei die Weickert-Diffusion die besten Ergebnisse erzielte.

$$g : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g(s) = \begin{cases} 1 & s = 0 \\ 1 - \exp\left(\frac{-3.31488}{(|s|/\lambda)^8}\right) & s > 0 \end{cases}$$

Bei der Weickert-Diffusion wird bis zu einer bestimmten Größe fast lineare Diffusion durchgeführt, für größere Gradienten erfolgt jedoch kaum noch Diffusion. Die Darstellung des Graphens der Weickert-Funktion vermittelt eine Verbildlichung dieses Geschehens:



Man erkennt leicht, dass zunächst Ergebnisse nahe bei 1,0 auftreten, welche eine lineare Diffusion implizieren, worauf aber nach einem raschen Abfall die Ergebnisse gegen 0 gehen, was ein Ausbleiben von Diffusion ausdrückt. Diese Grenze, bis zu welchen Größen der Gradienten Diffusion stattfinden soll bzw. ab welchen Größen der Gradienten keine Diffusion mehr geschehen soll, wird durch den Diffusionsparameter  $\lambda$  bestimmt. Der Parameter  $\lambda$  legt fest, bis zu welcher Gradientengröße gefiltert wird.

Betrachtet man nun die Grenzen für  $\lambda$ , so wird klar, dass bei sehr großen  $\lambda$  bis zu sehr großen Gradientengrößen noch starke Diffusion stattfindet, wohingegen klein gewählte  $\lambda$  zu wenig Filterungseffekten führen wird.

- $\lambda \rightarrow \infty$  überführt die Weickert-Diffusion in die lineare Diffusion, die Wärmeleitungsgleichung
- $\lambda \rightarrow 0$  führt zum gänzlichen Ausbleiben von Diffusion

Je nachdem ob der Endbenutzer nun also einen sehr starken Filterungseffekt erzielen möchte, bei dem auch harte Kanten mit in der Filterung betrachtet werden, oder ob nur eine geringe Filterung im kleineren Gradientenbereich stattfinden sollte, muss der Diffusionsparameter  $\lambda$  angepasst werden. In Abbildung 3.1 wurde  $\lambda = 100.0$  gewählt, was eine Filterung im Gradientenbereich der Hintergrundstrukturen zuließ, die Vordergrundstrukturen mit größeren Gradienten jedoch unbearbeitet ließ.



### 3.3 Der Vorglättungsparameter $\sigma$

Der Vorglättungsparameter  $\sigma$  in der isotropen Filterung dient dazu, eine Faltung mit der Gaußkurve durchzuführen vor der eigentlichen Filterung, um statt des eigentlichen Gradienten  $u$  den neu errechneten Gradienten  $u_\sigma$  zu betrachten. Dies dient dazu, die Gradienten in ihren Größenunterschieden ein wenig einander anzupassen, um eventuell auftretende Sprünge zu vermeiden.

$$u_\sigma := K_\sigma \cdot u$$
$$K_\sigma(x) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{n}{2}}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{2\sigma^2}\right)$$

Der Vorgang ist gleichbedeutend mit einer Vorglättung des Bildes mit linearer Diffusion. Man führt zunächst unabhängig von den auftretenden Gradientengrößen an allen Bildpunkten lineare Diffusion durch und erhält in der Berechnung ein an allen Stellen gleichmäßig verwischtes Bild. Dieses Bild liefert die Gradienten, die für die Entscheidung zur Filterung oder eines Unterlassens von Filterung benutzt werden. Wichtig ist, dass die Gradienten zwar dem vorgeglätteten Bild entnommen werden, die eigentliche Filterung aber anhand des Originalbildes geschieht.

Der Vorglättungsparameter  $\sigma$  legt fest wie lange sozusagen vorgeglättet wird.  $\sigma$  entscheidet wie stark die im Bild vorkommenden Gradienten angeglichen werden. Bei Betrachtung der Grenzen für  $\sigma$  bedeuten nun sehr große  $\sigma$ , dass eine lange Vorglättung stattfindet, die die Gradienten also stark einander angleicht, während bei kleineren  $\sigma$  kaum Vorglättung vollzogen wird, was die Gradientenangleichung gering hält.

- $\sigma \rightarrow \infty$  führt zu gleichgroßen Gradienten in jedem Punkt
- $\sigma \rightarrow 0$  führt zum Ausbleiben der Vorglättung

Je nachdem wie kontrastreich das vorliegende Bild ist, ob harte Konturen auftreten oder ob das Bild eher einheitliche Übergänge aufweist, muss der Vorglättungsparameter  $\sigma$  angepasst werden, um die auftretenden Gradienten zu vereinheitlichen. In Abbildung 3.1 wurde  $\sigma = 1 \cdot 10^{-4}$  gewählt, was sich generell als guter Ausgangspunkt für eine Filterung herausstellte.

### 3.4 Zusammenhang zwischen $\lambda$ und $\sigma$

In den beiden vorangegangenen Abschnitten wurde die Bedeutung des Diffusionsparameters  $\lambda$  und des Vorglättungsparameters  $\sigma$  erläutert. Beide Parameter verändern oder benutzen die Gradientengrößen des Bildes, weshalb eine Betrachtung des Zusammenhangs hierbei nahe liegt.

Es wurde herausgearbeitet, dass  $\lambda$  die Grenze der Gradientengröße festlegt, bezüglich derer entschieden wird ob Diffusion stattfindet oder nicht. Weiterhin wurde erarbeitet, dass  $\sigma$  die Gradientengröße beeinflusst, indem die Gradienten je nach Wahl von  $\sigma$  geringfügig oder stärker einander angeglichen werden.

- $\sigma$  beeinflusst die Gradientengröße  $\leftrightarrow \lambda$  setzt Gradientengrößengrenze für Diffusion

Demnach weisen diese beiden Parameter natürlich eine Wechselwirkung auf:

- kleinere  $\sigma$  erfordern eventuell größere  $\lambda$
- größere  $\sigma$  erfordern eventuell kleinere  $\lambda$

Dessen sollte sich ein Endbenutzer bei der richtigen Wahl der Parameter bezüglich seines Zielergebnisses bewusst sein.

### 3.5 Die Schrittbreite und die Iterationszahl

Die Parameter der Schrittbreite und der Iterationszahl seien im isotropen Fall nur aus Gründen der Vollständigkeit aufgeführt. Wahl und Auswirkung ist hierbei schnell erklärt und in der isotropen Filterung nicht maßgebend.

Wichtig ist ein Verständnis in Bezug auf die zeitliche Länge der Filterung, die sich auf den Filterungszeitpunkt  $t$  bezieht. (Nicht auf die Laufzeit des Filterprogramms bei der Durchführung einer Filterung. ) Die Bedeutung der Schrittbreite  $\tau$  in Verbindung mit der Iterationszahl zeigt sich in folgender Gleichung:

$$t = \text{Zeit der Filterung} = \tau \cdot \# \text{Iterationen}$$

Wie weit man im Filterungszeitpunkt  $t$  fortschreitet wird bestimmt durch die Schrittbreite  $\tau$  multipliziert mit der Anzahl der Schritte, die man durchführt, der Iterationszahl.

Da die Schrittbreite entscheidend für die Genauigkeit der numerischen Approximation ist, gilt natürlich, dass ein kleineres  $\tau$  somit auch eine genauere Berechnung mit sich bringt, wohingegen jedoch der Rechenaufwand steigt.

- Je kleiner  $\tau$ , desto genauer die Berechnung
- Je größer  $\tau$ , desto kleiner der Rechenaufwand

Schon jetzt sei erwähnt, dass sich hierbei ein großer Vorteil der isotropen Filterung zeigt, da bei der isotropen Filterung große Schrittbreiten möglich sind. Die Schrittbreitenwahl der anisotropen Filterung wird in Abschnitt 4 untersucht werden, wobei die Unterschiede zur isotropen Filterung herausgearbeitet werden.

In Abbildung 3.1 erwies sich die Wahl von 100 Iterationen bei einer Schrittbreite von  $\tau = 5 \cdot 10^{-4}$  als geeignet, um zeitlich in der Filterung bis zu dem gewünschten Ergebnis voranzuschreiten.

### 3.6 Isotrope Parameter des Physikerbildes No1

Die Untersuchung der Parameterauswirkungen im Falle der isotropen Filterung anhand des Physikerbildes *No1* führte zu folgendem Zielfilterungsergebnis:

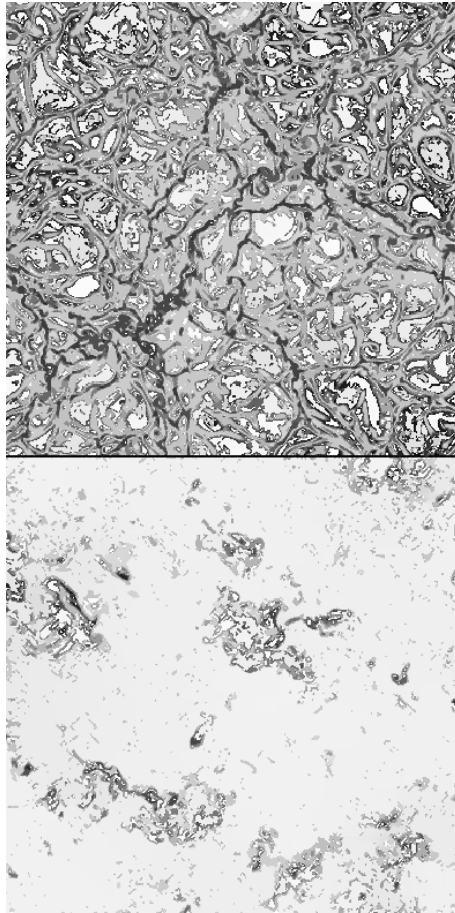


Abbildung 4: *No1* mit Weickert-Diffusion gefiltert

Die Parameter wurden wie folgt gewählt:

- Weickert-Diffusion mit  $\lambda = 100.0$
- $\sigma = 1 \cdot 10^{-4}$
- $\tau = 5 \cdot 10^{-4}$
- Durchführung von 100 Iterationen

## 4 Anisotropes Filtern

Nach der Untersuchung des praktischen Verständnisses der Auswirkungen der Parameterwahl bei isotropen Filterungen werden in diesem Abschnitt nun die Parameter der anisotropen Filterung genauer betrachtet. Hierbei ging es in erster Linie darum, die Grenzen bezüglich der Parameterwahl zu bestimmen innerhalb derer überhaupt brauchbare Ergebnisse gefunden wurden konnten. Ein Beispielbild der Augenmedizin mit gestellten Filterungszielen dient als Grundlage der Untersuchung. Das Bild weist zugleich auch die strukturellen Aspekte auf, die die anisotrope Filterung als funktionelle Erweiterung aufweist.

### 4.1 Parameter und Filterungsziele

Folgende Parameter treten bei der isotropen Filterung auf:

- 2 Diffusionsfunktion
- Parameter der gewählten Diffusionsfunktionen
- Vorglättungsparameter  $\sigma$
- Strukturparameter  $\rho$
- Zeitschrittbreite  $\tau$
- Iterationszahl

Die hier gewählten Diffusionsfunktionen bilden die Weickert-Diffusivität mit Parameter  $\lambda$  in Kontrastrichtung und die lineare Diffusion ohne Parameter in Normalenrichtung. Das Beispielbild dieses Abschnitts ist das Netzhautbild *HRA*:

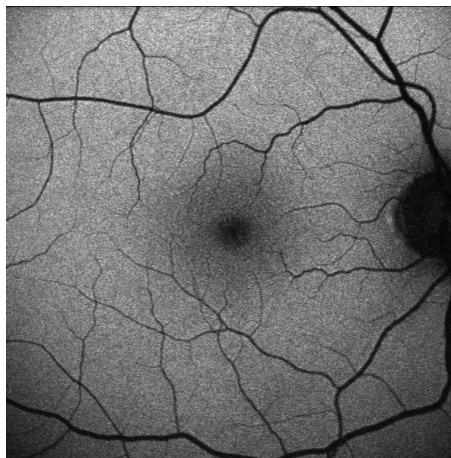


Abbildung 5: Netzhautbild *HRA*

Die wichtigen Informationen des Bildes *HRA* sind gegeben in Form von Adern, die strukturell in den Vordergrund treten. Insgesamt lässt sich erkennen, dass die

Strukturen weiter auseinanderliegen als dies im vorangegangenen Physikerbild der Fall war. Das gesamte Bild wirkt leicht verrauscht, insbesondere sind hier auch die Adern verrauscht.

Das Filterungsziel bei diesem Bild besteht nun darin, die Adern so gut wie möglich zu erhalten und gleichzeitig den Hintergrund durch Diffusion einheitlich zu verwischen. Das Bild soll insgesamt entrauscht werden, was bedeutet, dass auch auf den Adern Diffusion stattfinden muss, um das Rauschen hier zu entfernen.

Die Wahl der Filterungsart ist hier entscheidend, da es ermöglicht werden muss, die Adern zu erhalten und gleichzeitig zu entrauschen. Durch eine Untersuchung der Parameter konnte eine geeignete Wahl gefunden werden, um das Filterungsziel mit folgendem Ergebnis umzusetzen:

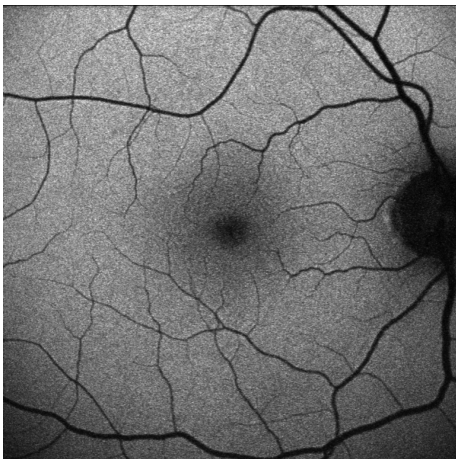


Abbildung 6: *HRA* vor der Filterung



Abbildung 7: *HRA* nach der Filterung

Ein Vorteil des anisotropen Filterergebnisses ist die Entrauschung der Kanten, die stattgefunden hat. Da in der anisotropen Filterung nicht nur entgegen der Richtung des stärksten Anstiegs gefiltert wird, sondern jetzt zwei Richtungen die Filterung beeinflussen, kann dieser Effekt erzielt werden. In der isotropen Filterung hätte aufgrund der starken Gradienten entlang der Kanten keine Filterung stattgefunden und die Adern wären unangetastet geblieben. In der hier durchgeführten Filterung wird jedoch in Kontrastrichtung mit der Weickert-Diffusion und in Normalenrichtung linear gefiltert. Das bedeutet, dass entlang der Adern keine Filterung stattfindet solange der berechnete Gradient hinreichend groß ist. Auf der Ader wird aber lineare Diffusion durchgeführt entlang der Normalenrichtung. Aus diesem Grund lässt sich das Rauschen auf den Adern entfernen, was bei einer isotroper Filterung nicht möglich gewesen wäre. Bevor dieses Filterungsziel allerdings erreicht werden konnte, traten zwei Probleme bei den Ergebnissen des anisotropen Filterns auf:

- Artefakte
- Van-Gogh-Effekt

Beide bezeichnen Eigenarten von Bildergebnissen. In Abbildung 8 und 9 sind diese Strukturen einmal verdeutlicht. Beim Auftreten von Artefakten ist die horizontale

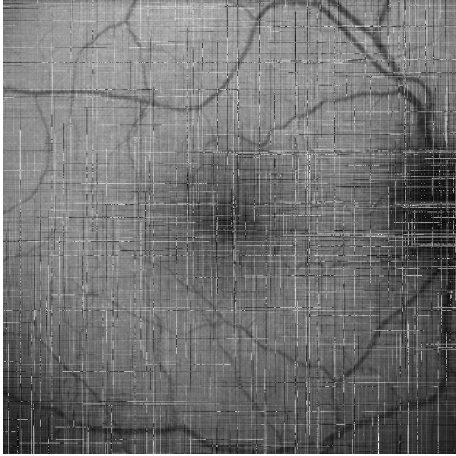


Abbildung 8: Filterungsergebnis mit Artefakten

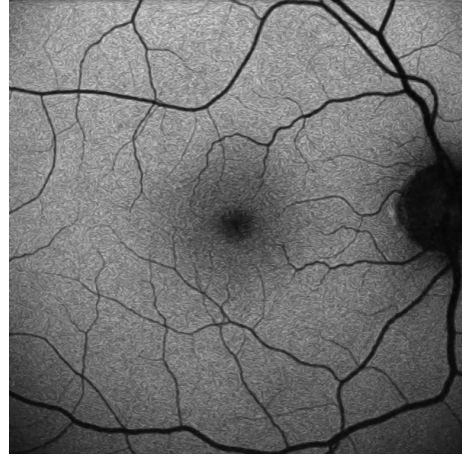


Abbildung 9: Filterungsergebnis mit Van-Gogh-Effekt

und vertikale Verzerrung in einem Bildpunkt gemeint. Das Bild wirkt gänzlich verunstaltet und es legt sich eine Art Verzerrung über das gesamte Originalbild.

Der Van-Gogh-Effekt ist eine selbstgewählte Bezeichnung für sehr *verschmierte* Filterergebnisse. Bei dieser Art des Ergebnisses wirkt das Bild als habe man im Van-Gogh-Stil mit einem dicken Pinsel die Strukturen nachgemalt.

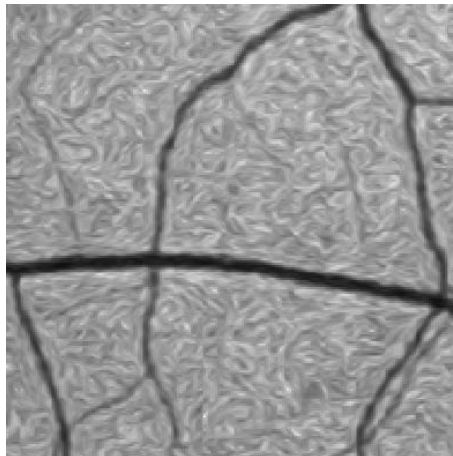


Abbildung 10: Van-Gogh-Effekt vergrößert

Diese beiden Filterungseffekte lassen sich jedoch durch die richtige Parameterwahl vermeiden. Eine Untersuchung der Parametereinstellung, insbesondere aber der Parametergrenzen im anisotropen Fall, ist daher unerlässlich.

## 4.2 Die Schrittbreite $\tau$

Ein entscheidender Parameter zur Vermeidung des Auftretens von Artefakten bei anisotropen Filterungen ist die Schrittbreite  $\tau$ . Bei verschiedenen Filterungen mit

unterschiedlichen Schrittbreiten stellte sich heraus, dass bei Schrittbreiten, die über  $5 \cdot 10^{-8}$  liegen, stets Artefakte auftreten. Selbst wenn die Filtereinstellungen ansonsten gute Ergebnisse erzielt hatten, wurden bei der Wahl von Schrittbreiten über der genannten Größen Artefakte beobachtet. So auch bei den Zielergebnissen des Netzhautbildes. Wurden die ansonsten dem Zielergebnis angepassten Parameter der Filterung in Abbildung 7 übernommen, die Schrittbreite aber auf einen Wert größer als  $5 \cdot 10^{-8}$  gesetzt, entstanden Filterungen folgender Art:

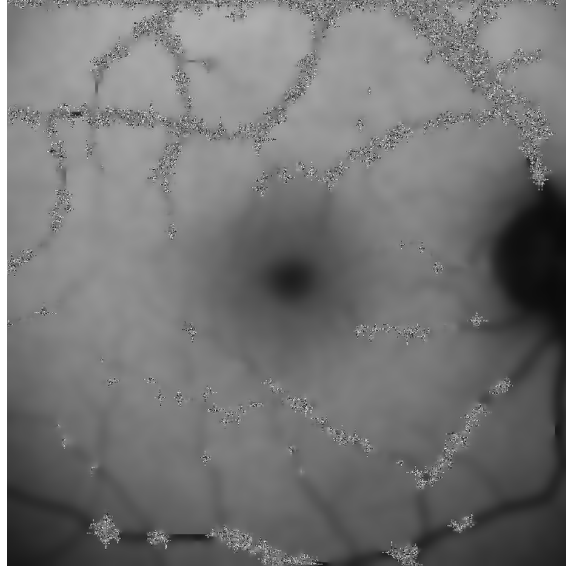


Abbildung 11:  $\tau = 5 \cdot 10^{-7}$  bei ansonsten geeigneter Parameterwahl

Diese Beobachtungen implizieren, dass die Schrittbreite  $\tau$  also möglichst klein gewählt werden sollte. Dem ist jedoch entgegenzusetzen, dass sehr kleine Schrittbreiten natürlich auch eine große Anzahl an Iterationen brauchen, um in der Filterungszeit voranzuschreiten. Da bei den ausgeführten Tests meistens eine Iterationszahl von 100 gewählt wurde, gilt es zu bedenken, dass bei einer sehr klein gewählten Schrittbreite somit nicht lange bezüglich der Filterungszeit gefiltert wird.

Die Praxis ergab daher, dass die Grenze für *sinnvolle Ergebnisse* bei  $5 \cdot 10^{-8}$  liegt.

- $\tau = 5 \cdot 10^{-8} \rightarrow$  gute Ergebnisse können erzielt werden
- $\tau$  größer  $\rightarrow$  Artefakte entstehen
- $\tau$  kleiner  $\rightarrow$  gute Ergebnisse, aber geringere Fortschreitung in der Filterungszeit

Aufgrund der zwingend kleineren Schrittbreiten, steigt der Rechenaufwand natürlich signifikant. Hierin zeigt sich ein Vorteil der isotropen Filterung gegenüber der anisotropen Filterung, da bei dieser auch größere Schrittbreiten zulässig sind.

### 4.3 Der Vorglättungsparameter $\sigma$

Die Schrittweite wird nun fest bei einem Wert von  $\tau = 5 \cdot 10^{-8}$  angenommen. Weiter geht es mit der Untersuchung der Auswirkungen des Vorglättungsparameters  $\sigma$  in der anisotropen Filterung. Der Parameter  $\sigma$  dient in der anisotropen Filterung wieder zur Berechnung des mit der Gaußkurve gefalteten Gradienten  $u_\sigma$ . Dieser wird hierbei genutzt zur Aufstellung der Matrix  $J_0(\nabla u_\sigma)$ , welche im nächsten Schritt durch den Strukturparameter  $\rho$  erneut geglättet wird.

$$J_0(\nabla u_\sigma) := \nabla u_\sigma \otimes \nabla u_\sigma = \nabla u_\sigma (\nabla u_\sigma)^T \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

Untersuchungen in der Variation der Wahl des Vorglättungsparameters  $\sigma$  ergaben einen Wertebereich für  $\sigma$  zwischen  $1 \cdot 10^{-5}$  und  $1 \cdot 10^{-3}$ . Bei einer größeren Wahl von  $\sigma$  verschwimmen die Konturen des Bildes, was mit der größeren Angleichung der Gradienten zusammenhängt, die im nächsten Schritt bei der Betrachtung der Umgebungen der einzelnen Gradienten nochmals angeglichen werden. Als bildliches Beispiel dient hierzu Abbildung 12, die das Netzhautbild mit größerem  $\sigma$  zeigt.

Wird  $\sigma$  hinreichend klein gewählt, tritt der Van-Gogh-Effekt auf, der aber, wie jetzt schon erwähnt sei, ebenfalls im Zusammenhang mit dem Diffusionsparameter  $\lambda$  steht. Abbildung 13 zeigt das Netzhautbild nach einer Filterung mit  $\sigma = 1 \cdot 10^{-5}$

- $\sigma$  zu groß  $\rightarrow$  Bild wirkt verschwommener
- $\sigma$  zu klein  $\rightarrow$  Van-Gogh-Effekt tritt auf

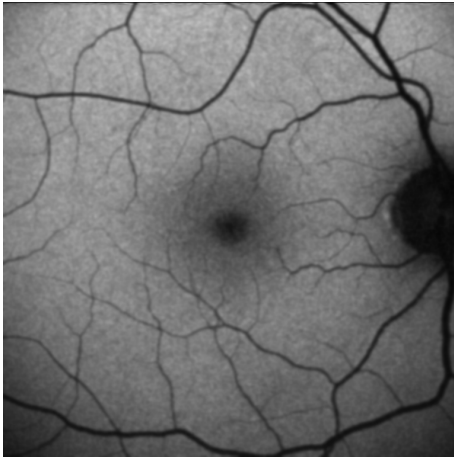


Abbildung 12:  $\sigma = 1 \cdot 10^{-1}$



Abbildung 13:  $\sigma = 1 \cdot 10^{-5}$

Je nachdem welches Filterungsergebnis dem gewünschten Ziel näherkommt, sollte also  $\sigma$  innerhalb der erwähnten Grenzen gewählt werden. In Abbildung 4.1 wurde  $\sigma = 1 \cdot 10^{-3}$  gewählt.



## 4.4 Der Strukturparameter $\rho$

Wie schon im vorangegangenen Abschnitt erwähnt wird der Strukturparameter  $\rho$  nach Erstellung der Matrix  $J_0(\nabla u_\sigma)$  zur Durchführung einer weiteren Faltung mit der Gauß-Kurve genutzt, wobei die geglättete Matrix  $J_\rho(\nabla u_\sigma)$  entsteht. Die Faltung erfolgt komponentenweise in Abhängigkeit des Strukturparameters  $\rho$ .

$$J_\rho(\nabla u_\sigma) := K_\rho * J_0(\nabla u_\sigma)$$

$$K_\sigma(x) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{n}{2}}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{2\sigma^2}\right)$$

Untersuchungen bezüglich der Wahl von  $\rho$  ergaben einen geeigneten Wahlbereich zwischen  $5 \cdot 10^{-5}$  und  $5 \cdot 10^{-3}$ . Bei größerer Wahl des Wertes von  $\rho$  erschienen auch hier die Filterungsergebnisse verschwommener, was mit der stärkeren Angleichung der Gradienten bezüglich der Betrachtung größerer Umgebungen zu den Bildpunkten zusammenhängt. Wird  $\rho$  zu klein gewählt, tritt auch hier wieder der Van-Gogh-Effekt eher auf, was ebenfalls wieder in Zusammenhang mit dem Diffusionsparameter  $\lambda$  gestellt werden sollte. Die beiden folgenden Abbildungen zeigen Ergebnisse des Netzhautbildes bei kleinerer bzw. größerer Wahl des Wertes von  $\rho$ .

- $\rho$  zu groß  $\rightarrow$  Bild wirkt verschwommener
- $\rho$  zu klein  $\rightarrow$  Van-Gogh tritt auf

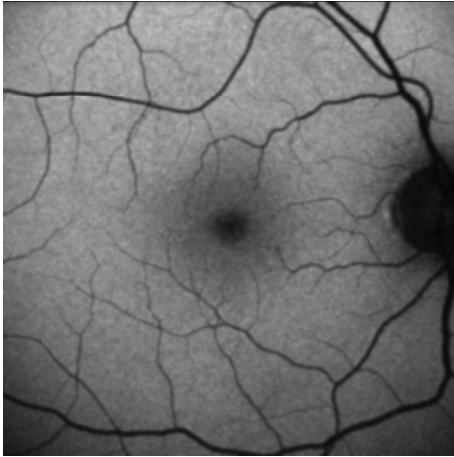


Abbildung 14:  $\rho = 5 \cdot 10^{-1}$



Abbildung 15:  $\rho = 5 \cdot 10^{-5}$

Betrachtet man die Grenzwerte für  $\rho$  so trägt dies zum Verständnis des Matrix-Vorglättungsparameters, dem Strukturparameter, bei. Denn lässt man den Wert von  $\rho$  gegen  $\infty$  laufen, so wird der in der Diffusion auftretende Tensor  $D$ , der ohnehin ja jetzt bei der anisotropen Filterung durch eine Matrix gegeben ist, zur Einheitsmatrix. Auf der anderen Seite führen hinreichend kleine  $\rho$  zu punktuellen Informationen für jeden Bildpunkt. Die Größe  $\rho$  bestimmt sozusagen die Größe der Umgebung, die zur Angleichung der Gradienten in Betrachtung gezogen wird.

- $\rho \rightarrow \infty$  überführt den Diffusionstensor  $D$  in die Einheitsmatrix
- $\rho \rightarrow 0$  führt zu punktuellen Informationen

Diese Überlegungen sind bei der Wahl von  $\rho$  im Hinterkopf zu behalten. Bei der Wahl von  $\rho$  bezüglich des Netzhautbildes stellte sich  $\rho = 5 \cdot 10^{-3}$  als geeignet heraus, was für die Filterung in Abbildung 7 gewählt wurde.

## 4.5 Die Weickert-Diffusion mit Diffusionsparameter $\lambda$

Im letzten Abschnitt der Betrachtung anisotroper Parameter erfolgt nun die Untersuchung der Auswirkung des Diffusionsparameters  $\lambda$ . Zur Erinnerung: In der anisotropen Filterung werden zwei Diffusivitäten gewählt. Eine bezüglich der Kontrastrichtung und eine bezüglich der Normalenrichtung. In diesem Fall wurden für die Betrachtungen die Weickert-Diffusion mit Diffusionsparameter  $\lambda$  in Kontrastrichtung und die lineare Diffusion ohne Parameter in Normalenrichtung gewählt. Die Wahl eines hinreichend großen  $\lambda$  in der anisotropen Filterung hat sich innerhalb dieser Filterungsuntersuchungen als entscheidend zur Vermeidung des Van-Gogh-Effekts herausgestellt. Allerdings sei hierbei erneut erwähnt, dass die Filterungen im anisotropen Fall unter anderen Fortschreitungen der Zeit betrachtet werden, da hier die Schrittbreite deutlich kleiner, aber mit gleichbleibender Iterationszahl gewählt wurde.

Die Filterungsergebnisse bezüglich des Netzhautbildes ergaben, dass  $\lambda$  relativ groß gewählt werden musste, das heißt, dass die Grenze bis zu der gefiltert wird, hoch gesetzt sein musste, um Ergebnisse ohne Van-Gogh-Effekt zu erhalten. Die folgende Abbildung zeigt eine kleinere Wahl von  $\lambda$ . Ein kleines  $\lambda$  brachte den Van-Gogh-Effekt deutlich hervor. Wird hingegen  $\lambda$  zu groß gewählt, führt dies zu einer wenig differenzierten Filterung, da bei hinreichend groß gewähltem  $\lambda$  die Weickert-Diffusion immer mehr der linearen Diffusion gleicht, bei der in jedem Bildpunkt Diffusion stattfindet.

- $\lambda$  größer  $\rightarrow$  weniger differenzierte Filterung findet statt
- $\lambda$  kleiner  $\rightarrow$  Van-Gogh-Effekt tritt bei längerer Filterung auf

Für die Zielfilterungen des Netzhautbildes bei einer Iterationszahl von 100 Iterationen zeigte sich jedoch ein relativ großer Wert für  $\lambda$ , nämlich  $\lambda = 1000.5$  als geeignet bezüglich des gewünschten Filterungsbildes, welches in Abbildung 7 dargestellt ist.

## 4.6 Zusammenhang zwischen $\lambda$ und $\tau$

Es ist zu bedenken, dass bei den hier durchgeführten anisotropen Filterungen stets die Iterationszahl auf 100 aufgrund von Rechnermöglichkeiten begrenzt wurde. Gerade bei der anisotropen Filterung gilt folgendes zu bedenken:

- Die Wahl der Umsetzung des anisotropen Falls, die anisotrope Diskretisierung, erfordert um Artefakte zu vermeiden eine kleine Zeitschrittbreite.
- Die kleine Zeitschrittbreite zusammen mit begrenzten Rechnermöglichkeiten ergeben zeitlich gesehen kürzere Filterungen.
- Kurze Filterungen zusammen mit groß gewähltem  $\lambda$ , also Filterung bis zu einer hohen Grenze von Gradientengrößen, ermöglichen nahezu das angestrebte Filterergebnis.

Es ist noch nicht untersucht, ob nicht der Van-Gogh-Effekt bei einer größeren Anzahl an Iterationen auch mit kleinerer Wahl des Parameters  $\lambda$  ausbleiben würde.

## 4.7 Anisotrope Parameter des Netzhautbildes HRA

Die Untersuchung der Parametergrenzen im Falle der anisotropen Filterung anhand des Netzhautbildes HRA führte zu folgendem Zielfilterungsergebnis:

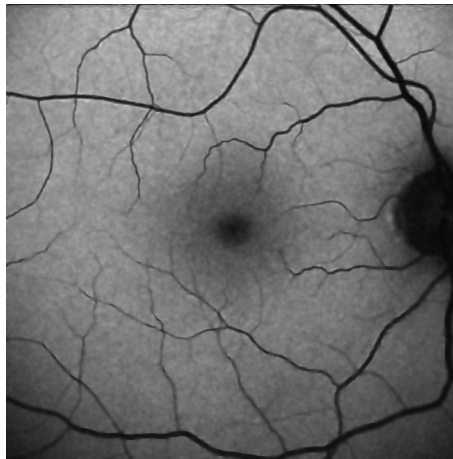


Abbildung 16: *HRA* mit Weickert-Diffusion und linearer Diffusion gefiltert

Die Parameter wurden wie folgt gewählt:

- Kontrastrichtung: Weickert-Diffusion mit  $\lambda = 1000.5$
- Normalenrichtung: lineare Diffusion
- $\sigma = 1 \cdot 10^{-3}$
- $\rho = 5 \cdot 10^{-3}$
- $\tau = 5 \cdot 10^{-8}$
- Durchführung von 100 Iterationen

## 5 Isotrop und Anisotrop

In den beiden vorangegangenen Abschnitten wurde versucht ein praktisches Verständnis für die Auswirkungen der Parameterwahl zu vermitteln. Weiterhin geht es jetzt darum, beide Filterungen einander nochmals im direkten Vergleich gegenüberzustellen. Um auch einen bildlichen Vergleich beider Filterungsarten zu erhalten, wurden beide Filterungen an einem dritten, von früheren Untersuchungen unabhängigen Bild unternommen.

### 5.1 Eine bildliche Gegenüberstellung

Das Physikerbild *No2* weist ebenfalls starke Kontraste auf mit teilweise auseinanderliegenden, aber auch sehr engmaschigen Strukturen. Ebenfalls auffallend sind die klaren Graustufenebenen, die dieses Bild enthält.

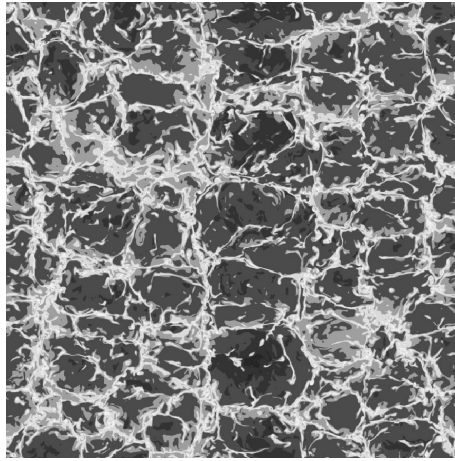


Abbildung 17: Physikerbild *No2* ungefiltert

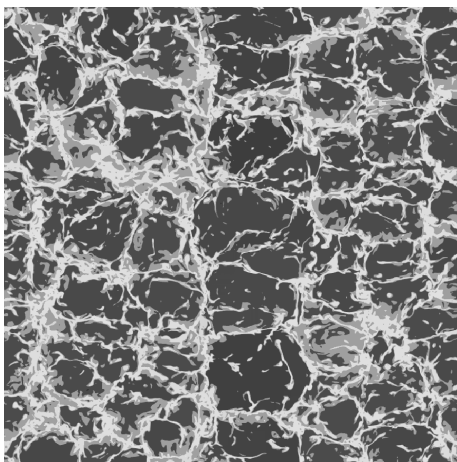


Abbildung 18: *No2* nach isotroper Filterung

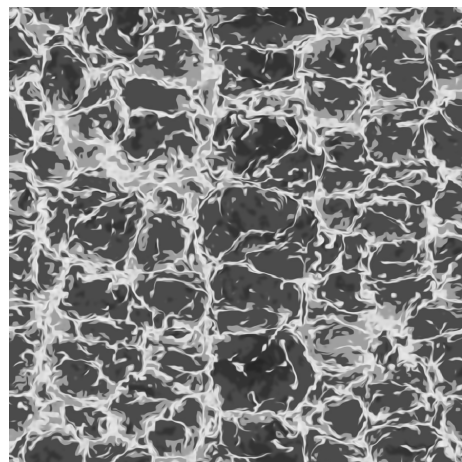


Abbildung 19: *No2* nach anisotroper Filterung

Je nachdem welches Ergebnis der Endbenutzer im Sinn hatte, lassen sich mit den unterschiedlichen Filterungen unterschiedliche Ziele erreichen. Bei der isotropen Filterung fällt auf, dass der dunkelste Grauton komplett weggefiltert werden konnte, sonst aber keinerlei strukturelle Veränderungen im Bild auftreten. Die isotrope Filterung zeigt sich hierbei als sehr gut geeignet zur Siebung von Informationen bzw. zur Verwischung einer Hintergrundebene.

Bei Betrachtung der anisotropen Filterung fällt auf, dass das Ergebnis leicht malerisch wirkt. In diesem Fall wurde nicht nur die hintergründig auftretende dunkelste Grauebene etwas verwischt und vereinheitlicht, es fand darüber hinaus auch eine Filterung bei den in den Vordergrund tretenden helleren Strukturen statt. Die Kanten wurden auch hier zu weichen Übergängen abgeschwächt. Anisotrope Filterung bietet eine Möglichkeit der unterschiedlichen Diffusion auf unterschiedlichen Strukturen.

## 5.2 Eine tabellarische Gegenüberstellung

Kommen wir nun zu einer direkten Gegenüberstellung der Eigenschaften isotroper und anisotroper Filterungen. Wichtig hierbei ist, im Hinterkopf zu behalten, dass nicht die isotrope und anisotrope Filterung an sich einander gegenübergestellt werden, sondern beide Filterungsarten im Hinblick auf die in der Diplomarbeit von Thomas Künzel und in der Oberflächenprogrammierung von Thomas Geiger gewählten Diskretisierungen.

pro isotrop	contra isotrop
große Schrittbreiten möglich	Kanten nicht enttauscht
nahliegende Kanten bleiben erhalten	
großflächige Verwischung bei Flächen mit geringem Gradienten	

pro anisotrop	contra anisotrop
Kanten werden enttauscht	nur kleine Schrittbreiten
	eng aneinanderliegende Kanten werden verwischt
Bei Flächen mit geringen Gradienten und gleichzeitig auf Kanten Diffusion	

Die Vorteile der isotropen Filterung liegen nur klar in der Verwendung größerer Schrittbreiten, um somit mit weniger Aufwand eine lange Filterungszeit zu erhalten. Ebenso lassen sich mit der isotropen Filterung wie sie hier umgesetzt wurde, gute Ergebnisse erzielen im Verwischen großflächiger Flächeninformationen mit geringerem Gradienten.

Die Vorteile der anisotropen Filterung wie sie hier realisiert wurde, zeigen sich in der Möglichkeit, die Kanten, also die Informationen mit starkem Gradienten, zu enttauschen. In der Filterung erhält man nun Einfluss auf Flächen mit geringen

Gradienten, die verwischt werden sollen, ebenso wie die Erhaltung mit gleichzeitiger Entrauschung stärker gewichteten Komponenten des Bildes.

### 5.3 Kombination beider Filterungsarten

Warum also nicht beide Vorteile der Filterungen miteinander kombinieren? Um ein gewünschtes Filterungsziel zu erreichen, könnte es sinnvoll sein, zuerst die isotrope Filterung anzuwenden, um mit größeren Schrittweiten rasch in der Filterungszeit voranzuschreiten und großflächige Hintergrundinformationen auszugleichen. Im nächsten Schritt könnte dann allerdings zielgerichtet die anisotrope Filterung stattfinden, mittels derer Kanten entrauscht werden und der Hintergrund weiter angeglichen, quasi die Feinarbeiten übernommen werden. Ein Beispiel für eine solche Arbeit bietet die Filterungsarbeit an einem unteren Ausschnitt des Physikerbildes *No1*.

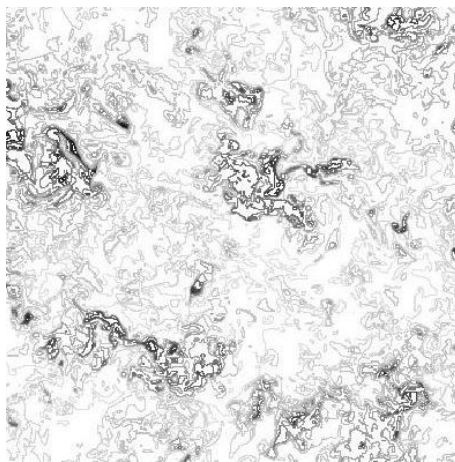


Abbildung 20: Physikerbild *No1*: unterer Teilausschnitt

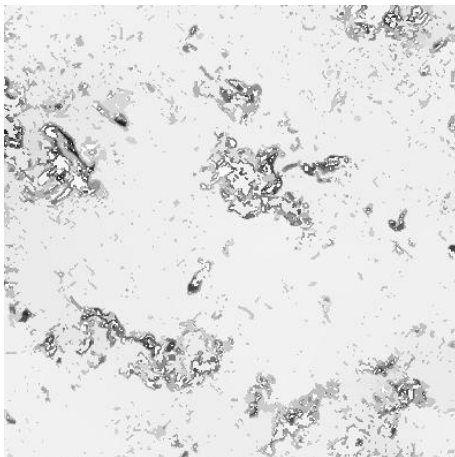


Abbildung 21: Teilausschnitt von *No1* nach isotroper Filterung

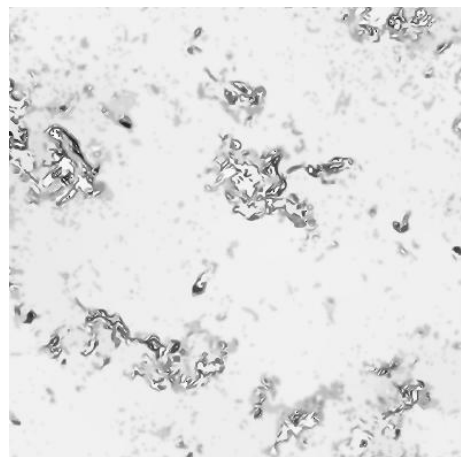


Abbildung 22: Teilausschnitt von *No1* nach anschließender anisotroper Filterung

## 6 Zusammenfassung

Im Abschlussbericht des Fortgeschrittenpraktikums zum Thema *Nichtlineare Diffusion* wurden zunächst die Grundlagen isotroper und anisotroper Filterung in Worten erklärt. Es folgte eine ausführliche Untersuchung der in der isotropen Filterung auftretenden Parameter. Hierbei wurden der Einfluss der Parameter und die Bedeutung der Grenzwerte vermittelt sowie ein praktisches Verständnis der Wahl der einzelnen Parameter bei Filterdurchgängen. Daraufhin erfolgte eine ergänzende und vergleichende Untersuchung der Parameter der anisotropen Filterung zusammen mit einer Formulierung sinnvoller Wertebereiche. Im letzten Abschnitt der Hauptarbeit wurden die beiden Filterungsarten in der dieser Arbeit zugrunde liegenden Diskretisierung und Umsetzung einander gegenübergestellt. Es wurden Vor- und Nachteile besprochen und eine mögliche Kombination beider Filterungsarten dargestellt.

Es bleibt festzuhalten, dass der anisotrope Filter eine geeignete Methode zur Entrauschung von Kanten bietet, was die Funktionalität des isotropen Filters hierin erweitert. Allerdings ist der anisotrope Filter in der derzeitigen Umsetzung noch nicht für größere Schrittbreiten und somit für längere Filterungen einsetzbar. Die Kombination beider Filterungsarten könnte hierfür jedoch einen praktikablen Ausweg bieten.

Mit der derzeitigen Umsetzung des anisotropen Filters sind größere Schrittbreiten nicht möglich. Eine veränderte Diskretisierung bzw. eine Überarbeitung der numerischen Lösungsansätze innerhalb des anisotropen Filters könnte eine größere Schrittbreite ermöglichen. Größere Schrittbreiten beim anisotropen Filtern könnten den Einsatz dieser Filterungsart noch vorteilhafter machen.

## Literatur

- [FE10] Fabian Feise Frank Eckhardt. Fortgeschrittenenpraktikum: Ergebnisbericht. Technical report, Philipps-Universität Marburg, 2010.
- [Gei10] Thomas Geiger. Fortgeschrittenenpraktikum: Ergebnisbericht. Technical report, Philipps-Universität Marburg, 2010.
- [K07] Thomas Künzel. Nichtlineare diffusion: Theoretische analyse und anwendungen bei strömungssimulationen. Master's thesis, Philipps-Universität Marburg, 2007.