Philipps-Universität Marburg **Winter-Semester 2013/14**
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. S. Dahlke, D. Lellek

Übungen zu Adaptive numerische Verfahren für Operatorgleichungen
1. Aufgabenblatt

Aufgabe 1 *(Lokale Fehlerschätzer)*
In der Vorlesung wurde die adaptive Spline-Approximation mit stückweise *konstanten* Funktionen besprochen. Ein lokaler Fehlerschätzer, der den Bedingungen (1.2.5) und (1.2.6) genügt, ist gegeben durch

$$\mathcal{E}(I) = |I| \, \|f'\|_{L_\infty(I)}.$$

Gib einen ähnlichen Fehlerschätzer für die Approximation mit stückweise *linearen* Funktionen an. Dabei wird f auf $I = [x_i, x_{i+1}]$ mit der Geraden durch $(x_i, f(x_i))$ und $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$ approximiert. Wie ändern sich die Glattheitsvoraussetzungen an f?
Hinweis: Numerik I.

Aufgabe 2 *(Hölder-Stetigkeit)*
Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, $k \in \mathbb{N}_0$ und $0 < \alpha \leq 1$. Der Raum aller k-mal Hölder-stetig (bzw. für $\alpha = 1$ Lipschitz-stetig) differenzierbaren Funktionen ist gegeben durch $C^{k,\alpha}(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{R} \,\big|\, \|f\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)} < \infty\}$, wobei

$$\|f\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)} := \sum_{|\beta| \leq k} \sup_{x \in \overline{\Omega}} |D^\beta f(x)| + \sum_{|\beta| = k} \sup_{x \neq y} \frac{|D^\beta f(x) - D^\beta f(y)|}{|x-y|^\alpha}.$$

Zeige, dass $f(x) = \sqrt{x}$ in $C^{0,\alpha}((0,1))$ liegt, genau dann wenn $\alpha \leq \frac{1}{2}$.

Aufgabe 3 *(L_p-Räume)*
Bei der Definition von L_p-Räumen werden in der Regel Funktionen identifiziert, die bis auf eine Nullmenge übereinstimmen, d.h. wir sagen

$$f = g \text{ in } L_p(\Omega) \Leftrightarrow f(x) = g(x) \text{ für fast alle } x \in \Omega.$$

Warum ist diese Modifikation notwendig?

Aufgabe 4 *(Stetige Einbettung zwischen L_p-Räumen auf endlichen Gebieten)*
Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit $|\Omega| < \infty$, $1 \leq p \leq q < \infty$ und $f \in L_q(\Omega)$. Zeige, dass

$$\|f\|_{L_p(\Omega)} \leq |\Omega|^{1/p - 1/q} \|f\|_{L_q(\Omega)}.$$

Hinweis: Nutze die Höldersche Ungleichung.

Besprechung in den Übungen am 31.10.2013