Philipps-Universität Marburg **Sommersemester 2016**
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. S. Dahlke, F. Eckhardt

Übungen zur Vorlesung
Angewandte Funktionalanalysis
11. Aufgabenblatt

Aufgabe 11.1. *(4 Punkte)*
In welchen Räumen $W^1(L_p(\Omega))$, $1 \leq p \leq \infty$, liegen die Funktionen

(i) $u(x) := x^{\frac{5}{2}} \sin(\frac{1}{x})$ mit $\Omega := (0,1)$,

(ii) $v(x) := |\ln(x)|^{-1}$ mit $\Omega := (0, \frac{1}{2})$.

Aufgabe 11.2. *(3 Punkte)*
Es sei $\Omega := (0,1)$. Zeigen Sie, dass sich jedes $f \in W^1(L_1(0,1))$ auf einer Nullmenge so abändern lässt, dass

$$f(x) - f(y) = \int_y^x D^1 f(\xi)\, d\xi, \quad \text{für alle } x, y \in (0,1), x \geq y.$$

Aufgabe 11.3. *(3 Punkte)*
Zeigen Sie, dass $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ dicht in $W^m(L_p(\mathbb{R}^d))$ liegt für $m \in \mathbb{N}$ und $1 \leq p < \infty$.

Aufgabe 11.4. *(4 Punkte)*
Zeigen Sie Lemma 5.5.1 der Vorlesung: Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein Gebiet und sind $u, v \in L_{2,\mathrm{loc}}(\Omega)$, wobei mindestens eine der Funktionen kompakten Träger hat, so gilt für hinreichend kleines $h > 0$:

$$\left\langle u, D_i^{+h} v \right\rangle = - \left\langle D_i^{-h} u, v \right\rangle.$$

Abgabe: 08.07.2016 vor der Vorlesung