Philipps-Universität Marburg **Sommersemester 2016**
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. S. Dahlke, F. Eckhardt

Übungen zur Vorlesung
Angewandte Funktionalanalysis
2. Aufgabenblatt

Aufgabe 2.1. *(4 Punkte)*
Es sei (X, τ) ein topologischer Raum. Ein System $\{A_i\}_{i\in I}$, $A_i \subset X$ für alle $i \in I$, I eine beliebige Indexmenge, heißt *zentriert*, wenn alle A_i abgeschlossen sind und für jede endliche Indexmenge $I_0 \subset I$ gilt: $\cap_{i\in I_0} A_i \neq \emptyset$.
Zeigen Sie: X ist genau dann kompakt, wenn für jedes zentrierte System $\cap_{i\in I} A_i \neq \emptyset$ erfüllt ist.

Aufgabe 2.2. *(2+2=4 Punkte)*

(i) Sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum und $C(X)$ der Raum der auf X stetigen $\mathbb{K}$-wertigen Funktionen mit der Norm $\|f\|_\infty := \max_{x\in X} |f(x)|$.
Zeigen Sie, dass $(C(X), \|\cdot\|_\infty)$ ein Banachraum ist.

(ii) Sei M eine beliebige Menge und $B(M)$ die Menge der Abbildungen $f : M \to \mathbb{R}$, so dass

$$M_\varepsilon(f) := \{x \in M : |f(x)| \geq \varepsilon\}$$

endlich ist für alle $\varepsilon > 0$. Zeigen Sie, dass $B(M)$ zusammen mit der Supremumsnorm ein Banachraum ist.

Aufgabe 2.3. *(4 Punkte)*
Sind X, Y Banachräume, so ist auch $X \times Y$ ein Banachraum mit der Norm $\|(x, y)\|_{X\times Y} = \|x\|_X + \|y\|_Y$. Charakterisieren Sie den Dualraum von $X \times Y$ durch X' und Y'.

Aufgabe 2.4. *(4 Punkte)*
Es sei $c_0(\mathbb{N}) \subset \ell_\infty(\mathbb{N})$ der Raum der Nullfolgen. Zeigen Sie: $c_0(\mathbb{N})' \cong \ell_1(\mathbb{N})$.

Abgabe: 05.05.2016 vor der Vorlesung