

Übungen zur Vorlesung
ANGEWANDTE FUNKTIONALANALYSIS
9. Aufgabenblatt

Aufgabe 9.1. (4 Punkte)

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein Gebiet. Zeigen Sie, dass $L_\infty(\Omega)$ vollständig bezüglich $\|\cdot\|_\infty$ gemäß Definition 4.1.1 ist.

Aufgabe 9.2. (2 Punkte)

Zeigen Sie, dass $(L_2(\Omega), (\cdot, \cdot))$ ein Hilbertraum ist, wobei

$$(f, g) := \int_{\Omega} f(x) \cdot \overline{g(x)} dx, \quad f, g \in L_2(\Omega)$$

ist.

Aufgabe 9.3. (4 Punkte)

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein Gebiet. Geben Sie einen Unterraum M des Banachraums $(L_\infty(\Omega), \|\cdot\|_\infty)$ an, der isometrisch isomorph zu $(\ell_\infty(\mathbb{N}), \|\cdot\|_{\ell_\infty(\mathbb{N})})$ ist.

Aufgabe 9.4. (4 Punkte)

Es sei $\Omega := (0, 1) \subset \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass der Raum $C^0(\bar{\Omega})$ stetig, aber nicht kompakt in $L_2(\Omega)$ eingebettet ist.