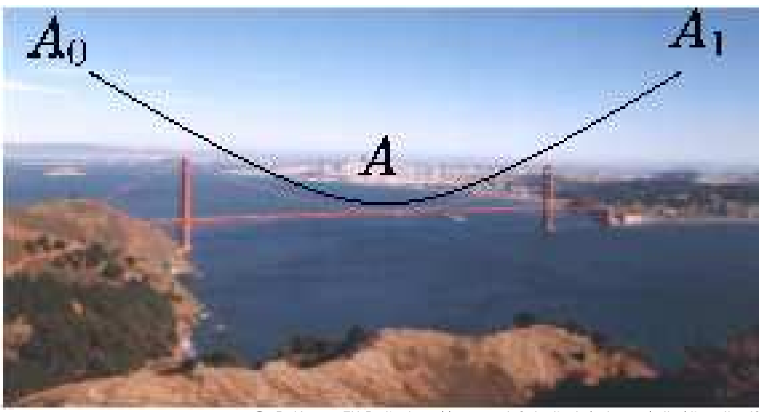
Vorlesung

Interpolationstheorie

Dorothee D. Haroske



© R. Krause, FU Berlin, http://www.math.fu-berlin.de/∼krause/talks/diss_talk.pdf

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

Seien A_0, A_1, B_0 und B_1 *Banach*[1]-Räume, und $T: A_i \longrightarrow B_i$, $i = 0, 1$, ein linearer und stetiger Operator, d.h.

$$\left.\begin{array}{l} T(\lambda f + \mu g) = \lambda T(f) + \mu T(g) \quad \forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}/\mathbb{C}, \quad \forall\, f, g \in A_i,\ i = 0, 1, \\ \text{und} \\ \|T : A_i \longrightarrow B_i\| = \|T\|_i = \sup\limits_{f \neq 0} \dfrac{\|T(f)|B_i\|}{\|f|A_i\|} \ < \ \infty \end{array}\right\} T \in \mathcal{L}(A_i, B_i),\ i = 0, 1$$

$\dashrightarrow$ gleiche Bezeichnung für verschiedene Operatoren T logisch unsauber, *präzise Formulierung* :

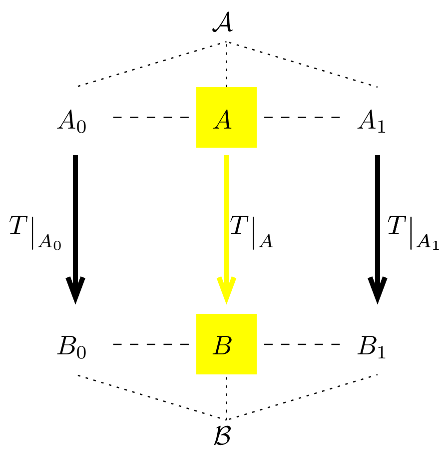
Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ lineare *Hausdorff*[2]-Räume[3] mit $A_i \subset \mathcal{A}$, $B_i \subset \mathcal{B}$, $i = 0, 1$ (mengentheoretisch und topologisch), wobei $T : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ ein linearer Operator ist, für den die Einschränkung

$$T\big|_{A_i} : A_i \longrightarrow B_i\ , \quad i = 0, 1,$$

stetig (beschränkt) ist. Dann heißen $\{A_0, A_1\}$ und $\{B_0, B_1\}$ <u>Interpolationspaare</u> von Banach-Räumen

$\dashrightarrow$ *Frage* : $\exists\, A \subset \mathcal{A},\ B \subset \mathcal{B}$ Banach-Räume : $T\big|_A : A \longrightarrow B$ linear und stetig ?

Dann besitzen A und B die <u>Interpolationseigenschaft</u> bezüglich $\{A_0, A_1\}$ und $\{B_0, B_1\}$.



mögliche Ziele :

(1) Konstruktion einer ‘Vorschrift’ F, so einfach und weitreichend wie möglich, so dass für gegebene $\{A_0, A_1\}$ und $\{B_0, B_1\}$ (wie oben) $F(\{A_0, A_1\}) =: A$ und $F(\{B_0, B_1\}) =: B$ die Interpolationseigenschaft besitzen

(2) Beschreibung aller möglichen A, B und aller solcher F

Vorlesung : betrifft (1), auch nur teilweise, d.h. nur sogenannte ‘reelle’ Interpolationsmethoden

<u>Literatur</u> : Bücher [BL76], [Tri78], [BS88], [BK91], [KPS82]

Bemerkung : historisch : erste Resultate Marcel Riesz[4] (1926), G. Olof Thorin (1939), systematische Untersuchung ab Ende der 50'er Jahre 20. Jh. durch Jacques-Louis Lions[5], Emilio Gagliardo, Alberto P. Calderón[6], S.G. Krejn, Jaak Peetre[7]

<u>Zur Illustration zwei einführende Beispiele</u>

(i) L_{p_θ} besitzt Interpolationseigenschaft bezüglich $\{L_{p_0}, L_{p_1}\}$, $\quad \dfrac{1}{p_\theta} = \dfrac{1-\theta}{p_0} + \dfrac{\theta}{p_1}, \quad 0 < \theta < 1$

(ii) C^1 besitzt <u>nicht</u> die Interpolationseigenschaft bezüglich $\{C, C^2\}$

---

[1]Stefan Banach (* 30.3.1892 Kraków † 31.8.1945 Lvov)
[2]Felix Hausdorff (* 8.11.1868 Breslau † 26.1.1942 Bonn)
[3]<u>topologischer Raum</u> $(X, \mathcal{T}) : \mathcal{T} \subset \mathfrak{P}(X), \emptyset, X \in \mathcal{T}, A_i \in \mathcal{T} \implies \cup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}, \cap_{i=1}^k A_i \in \mathcal{T}$; $U \subset X$ <u>Umgebung</u> von $M \subset X \iff \exists\, V \in \mathcal{T} :\ M \subset V \subset U$; $(X, \mathcal{T})$ <u>Hausdorff-Raum</u> (separiert) $\iff$ $(X, \mathcal{T})$ erfüllt Trennungsaxiom $T_2 \iff \forall\, x, y \in X, x \neq y\ \exists\, U, V \subset X$, Umgebungen für $\{x\}, \{y\}\ :\ U \cap V = \emptyset$
[4]Marcel Riesz (* 16.11.1886 Györ/Ungarn † 4.9.1969 Lund)
[5]Jacques-Louis Lions (* 2.5.1928 Grasse, Alpes-Maritimes/Frankreich † 17.5.2001 Paris)
[6]Alberto P. Calderón (* 14.9.1920 Mendoza/Argentinien † 16.4.1998)
[7]Jaak Peetre (* 29.7.1935 Tallinn)

(i) *Klassisch* : erster Interpolationssatz (Riesz/Thorin)

Seien $(X,\mathfrak{X},\mu)$ vollständiger Maßraum[8], μ ... σ-endliches Maß auf $(X,\mathfrak{X})$, z.B. $(\mathbb{R}^n,\mathfrak{B},\ell_n)$. Für $1\le p<\infty$ enthält der *Lebesgue*[9]-Raum $L_p=L_p(X,\mathfrak{X},\mu)$ alle bezüglich μ p-integrierbaren Funktionen, d.h.

$$\int_X |f(x)|^p\mu(\,\mathrm{d}x) \;<\; \infty \qquad f: X\longrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{C} \quad \text{messbar,}$$

und $L_\infty=L_\infty(X,\mathfrak{X},\mu)$ ist die Gesamtheit aller μ-f.ü. beschränkten Funktionen,

$$\operatorname*{ess\ sup}_{x\in X}|f(x)| = \inf_{\substack{E\,\in\,\mathfrak{X},\\ \mu(E)\,=\,0}} \;\sup_{x\in X\setminus E} |f(x)| \;=\; \inf\{N:\mu(\{x\in X:|f(x)|>N\})=0\} \;<\; \infty$$

Bemerkung : L_p enthält Äquivalenzklassen : $f_1\sim f_2 \iff f_1=f_2$ μ-f.ü., $[f]=\{g:g\sim f\}$, $\curvearrowright$

$$\mathcal{L}_p=\left\{[f]:\int_X |g(x)|^p\mu(\,\mathrm{d}x)<\infty,\; g\in[f]\right\}$$

$\dashrightarrow$ identifizieren f mit $[f]$, $\mathcal{L}_p$ mit L_p, $1\le p\le\infty$

bekannt :

- L_p wird mit Norm

$$\|f|L_p\| \;=\; \begin{cases} \left(\displaystyle\int_X |f(x)|^p\mu(\,\mathrm{d}x)\right)^{\frac{1}{p}} & ,\quad 1\le p<\infty \\ \operatorname*{ess\ sup}_{x\in X}|f(x)| & ,\quad p=\infty \end{cases}$$

  zu einem Banach-Raum

- *Hölder*[10]-Ungleichung : $1\le p\le\infty$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'}=1$, $f\in L_p$, $g\in L_{p'}$ $\curvearrowright$

$$\left|\int_X f(x)g(x)\mu(\,\mathrm{d}x)\right| \;\le\; \|fg|L_1\| \;\le\; \|f|L_p\|\;\|g|L_{p'}\| \tag{1}$$

Satz 1 (Konvexitätssatz von Riesz/Thorin)
Seien $1\le p_0,p_1,q_0,q_1\le\infty$, $p_0\ne p_1$, $q_0\ne q_1$, *und* $A:L_{p_i}\longrightarrow L_{q_i}$, $i=0,1$, *linear und stetig. Dann gilt für* $0<\theta<1$,

$$A:L_{p_\theta}\longrightarrow L_{q_\theta} \quad \textit{linear und stetig,}$$

wobei

$$\frac{1}{p_\theta}:=\frac{1-\theta}{p_0}+\frac{\theta}{p_1}, \qquad \frac{1}{q_\theta}:=\frac{1-\theta}{q_0}+\frac{\theta}{q_1}$$

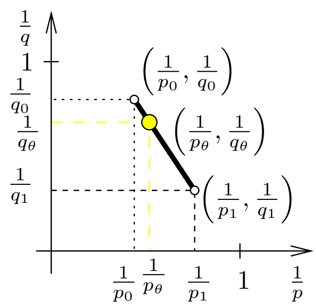
definiert sind. Für die Normen erhält man die Abschätzung

$$\|A:L_{p_\theta}\longrightarrow L_{q_\theta}\|\le\|A:L_{p_0}\longrightarrow L_{q_0}\|^{1-\theta}\;\|A:L_{p_1}\longrightarrow L_{q_1}\|^{\theta}\;. \tag{2}$$

[8] μ vollständig auf $(X,\mathfrak{X}) \iff \forall\, A,B\subset X\;: A\in\mathfrak{X},\;\mu(A)=0,\; B\subset A \implies B\in\mathfrak{X}$
[9] Henri Léon Lebesgue (* 28.6.1875 Beauvais, Picardie/Frankreich † 26.7.1941 Paris)
[10] Otto Ludwig Hölder (* 22.12.1859 Stuttgart † 29.8.1937 Leipzig)

Bemerkung :

- Beweis in Abschnitt 2
- Abschätzung (2) so nur richtig für komplexe L_p-Räume, d.h. $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$; im reellen Fall $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ noch zusätzlicher Faktor 2 rechts
- Anwendungen z.B. auf Fourier-Transformation, Faltungsoperator



(ii) *„Gegenbeispiel“* von Mityagin/Semenov

Sei $C^k[-1,1]$ der Banach-Raum der gleichmäßig stetigen und beschränkten Funktionen auf $[-1,1]$, $k \in \mathbb{N}_0$,

$$\left\| f | C^k[-1,1] \right\| = \sum_{\ell=0}^{k} \frac{1}{\ell!} \underbrace{\max_{x\in[-1,1]} \left| f^{(\ell)}(x) \right|}_{\left\| f^{(\ell)} | L_\infty[-1,1] \right\|} < \infty,$$

d.h. insbesondere

$$\|f|\, C[-1,1]\| = \max_{x\in[-1,1]} |f(x)|\,, \qquad \left\|f|C^1[-1,1]\right\| = \|f|C[-1,1]\| + \max_{x\in[-1,1]} |f'(x)|\,,$$
$$\left\|f|C^2[-1,1]\right\| = \left\|f|C^1[-1,1]\right\| + \frac{1}{2} \max_{x\in[-1,1]} |f''(x)|$$

zeigen: $C^1[-1,1]$ besitzt $\boxed{\textbf{nicht}}$ die Interpolationseigenschaft bezüglich $\left\{C[-1,1], C^2[-1,1]\right\}$

Satz 2 (Mityagin/Semenov [MS76])
Sei für beliebiges $\varepsilon \in (0,1]$ der Operator V_ε auf $C[-1,1]$ gegeben als

$$(V_\varepsilon f)(x) = \int_{-1}^{1} \frac{x}{x^2+y^2+\varepsilon^2} [f(y) - f(0)]\, \mathrm{d}y\,, \quad x \in [-1,1], \quad f \in C[-1,1]\,. \tag{3}$$

Dann gelten folgende Aussagen :

(a) $V_\varepsilon : C[-1,1] \longrightarrow C^\infty[-1,1]$

(b) $\|V_\varepsilon : C[-1,1] \longrightarrow C[-1,1]\| < 2\pi$ *gleichmäßig für alle* ε, $0 < \varepsilon \le 1$

(c) $\left\|V_\varepsilon : C^2[-1,1] \longrightarrow C^2[-1,1]\right\| < 5\pi + 2 < 18$ *gleichmäßig für alle* ε, $0 < \varepsilon \le 1$

(d) *Für* $f_\varepsilon(y) := \sqrt{y^2+\varepsilon^2} - \varepsilon$ *gilt* $\left\|f_\varepsilon|C^1[-1,1]\right\| \le 2$ *gleichmäßig für alle* ε, $0 < \varepsilon \le 1$,
$(V_\varepsilon f_\varepsilon)'(0) > 2\ln\left(\frac{1}{10\varepsilon}\right)$, *d.h.* $\left\|V_\varepsilon : C^1[-1,1] \longrightarrow C^1[-1,1]\right\| > \ln\left(\frac{1}{10\varepsilon}\right) \xrightarrow[\varepsilon\downarrow 0]{} \infty$.

Beweis : $\boxed{\text{zu (a)}}$: sei $f \in C[-1,1] \implies (V_\varepsilon f)(x)$ existiert für $x \in [-1,1]$; sei $h > 0$ $\curvearrowright$

$$\frac{(V_\varepsilon f)(x+h) - (V_\varepsilon f)(x)}{h} = \int_{-1}^{1} \underbrace{\frac{1}{h}\left[\frac{x+h}{(x+h)^2+y^2+\varepsilon^2} - \frac{x}{x^2+y^2+\varepsilon^2}\right]}_{\text{Taylor}\,:\ \frac{y^2+\varepsilon^2-(x+\vartheta h)^2}{\left((x+\vartheta h)^2+y^2+\varepsilon^2\right)^2} \xrightarrow[h\to 0]{} \frac{y^2+\varepsilon^2-x^2}{(x^2+y^2+\varepsilon^2)^2}} [f(y)-f(0)]\,\mathrm{d}y$$

$$\xrightarrow[h\to 0]{} \int_{-1}^{1} \frac{y^2+\varepsilon^2-x^2}{(x^2+y^2+\varepsilon^2)^2} [f(y)-f(0)]\,\mathrm{d}y$$

$$\implies (V_\varepsilon f)'(x) \text{ existiert} \underset{\text{Iteration}}{\implies} V_\varepsilon f \in C^\infty[-1,1]$$

$\boxed{\text{zu (b)}}$: Sei $f \in C[-1,1],\ f \neq 0$

$x = 0 \implies (V_\varepsilon f)(0) = 0$

$$x \neq 0 \implies |(V_\varepsilon f)(x)| \leq \int_{-1}^{1} \frac{|x|}{x^2+y^2+\varepsilon^2} \underbrace{|f(y)-f(0)|}_{\leq 2\|f|C[-1,1]\|} \mathrm{d}y \underset{\text{Symm.}}{\leq} 4\,\|f|C[-1,1]\| \int_0^1 \frac{|x|}{x^2+y^2+\varepsilon^2}\,\mathrm{d}y$$

$$< 4\,\|f|C[-1,1]\| \underbrace{\int_0^\infty \frac{|x|}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y}_{\arctan\left(\frac{y}{|x|}\right)\Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2}} = 2\pi\,\|f|C[-1,1]\|$$

$$\implies \|V_\varepsilon f|C[-1,1]\| < 2\pi\,\|f|C[-1,1]\| \implies \|V_\varepsilon : C[-1,1] \longrightarrow C[-1,1]\| < 2\pi$$

$\boxed{\text{zu (c)}}$: Sei $h(y) = y \implies h \in C[-1,1]$,

$$(V_\varepsilon h)(x) = \int_{-1}^{1} \frac{x}{x^2+y^2+\varepsilon^2} \underbrace{[h(y)-h(0)]}_{y} \mathrm{d}y = \int_{-1}^{1} \underbrace{\frac{xy}{x^2+y^2+\varepsilon^2}}_{\text{ungerade}} \mathrm{d}y \underset{\text{Symm.}}{=} 0 \tag{4}$$

Sei $f \in C^2[-1,1] \underset{\text{Taylor}}{\implies} f(y) = f(0)+f'(0)y+r_2(f,y)$ mit $|r_2(f,y)| = \dfrac{|f''(\vartheta y)|}{2}y^2 < \left\|f|C^2[-1,1]\right\| y^2$

$$\implies (V_\varepsilon f)(x) = \int_{-1}^{1} \frac{x}{x^2+y^2+\varepsilon^2}[f(y)-f(0)]\,\mathrm{d}y - \underbrace{\int_{-1}^{1} \frac{x}{x^2+y^2+\varepsilon^2}[f'(0)y]\,\mathrm{d}y}_{=0 \quad \text{nach (4)}}$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{x}{x^2+y^2+\varepsilon^2} \underbrace{[f(y)-f(0)-f'(0)y]}_{r_2(f,y)} \mathrm{d}y$$

$$\implies \left|(V_\varepsilon f)'(x)\right| \leq \int_{-1}^{1} \underbrace{\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x}{x^2+y^2+\varepsilon^2}\right)\right|}_{\frac{|y^2-x^2+\varepsilon^2|}{(x^2+y^2+\varepsilon^2)^2} < \frac{1}{x^2+y^2+\varepsilon^2} < \frac{1}{y^2+\varepsilon^2}} \overbrace{|r_2(f,y)|}^{<\left\|f|C^2[-1,1]\right\|y^2} \mathrm{d}y$$

$$< \left\|f|C^2[-1,1]\right\| \int_{-1}^{1} \frac{y^2}{y^2+\varepsilon^2}\,\mathrm{d}y < 2\,\left\|f|C^2[-1,1]\right\| \int_0^1 \mathrm{d}y = 2\,\left\|f|C^2[-1,1]\right\|$$

$$\left|\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(\frac{x}{x^2+y^2+\varepsilon^2}\right)\right| = \frac{2|x||x^2-3y^2-3\varepsilon^2|}{(x^2+y^2+\varepsilon^2)^3} < \frac{2|x|3\left(x^2+y^2+\varepsilon^2\right)}{(x^2+y^2+\varepsilon^2)^3} = \frac{6|x|}{(x^2+y^2+\varepsilon^2)^2}$$

$$x \neq 0\ :\ \left|(V_\varepsilon f)''(x)\right| \;\le\; \int_{-1}^{1} \underbrace{\left|\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(\frac{x}{x^2+y^2+\varepsilon^2}\right)\right|}_{<\,\frac{6|x|}{(x^2+y^2+\varepsilon^2)^2}} \overbrace{|r_2(f,y)|}^{<\left\|f|C^2[-1,1]\right\|y^2} \,\mathrm{d}y \;<\; 6\left\|f|C^2[-1,1]\right\| \int_{-1}^{1} \frac{|x|y^2}{(x^2+y^2+\varepsilon^2)^2}\,\mathrm{d}y$$

$$\underset{\text{Symm.}}{=} 12\left\|f|C^2[-1,1]\right\| \int_0^1 \frac{|x|y^2}{(x^2+y^2+\varepsilon^2)^2}\,\mathrm{d}y < 12\left\|f|C^2[-1,1]\right\| \int_0^1 \frac{|x|}{x^2+y^2+\varepsilon^2}\,\mathrm{d}y$$

$$< 12\left\|f|C^2[-1,1]\right\| \underbrace{\int_0^\infty \frac{|x|}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y}_{\arctan\left(\frac{y}{|x|}\right)\Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2}} = 6\pi\left\|f|C^2[-1,1]\right\|$$

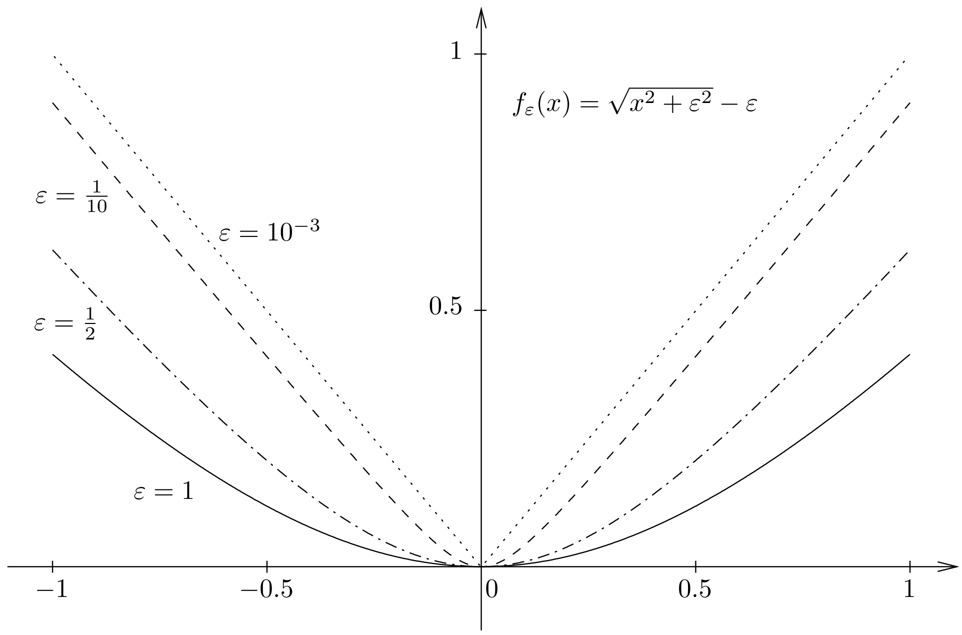
$$\Longrightarrow\quad \left\|V_\varepsilon f|C^2[-1,1]\right\| \le \left\|f|C^2[-1,1]\right\|\left(2\pi+2+\frac{1}{2}\,6\pi\right) = (5\pi+2)\left\|f|C^2[-1,1]\right\| < 18\left\|f|C^2[-1,1]\right\|$$

$$\Longrightarrow\quad \left\|V_\varepsilon|C^2[-1,1]\longrightarrow C^2[-1,1]\right\| < 18$$

$\boxed{\text{zu (d)}}$: Sei $f_\varepsilon(y) = \sqrt{y^2+\varepsilon^2}-\varepsilon \quad\Longrightarrow\quad f_\varepsilon(y) = f_\varepsilon(-y), \quad f_\varepsilon(0)=0$

$$\left.\begin{array}{l} |f_\varepsilon(y)| = \dfrac{y^2}{\sqrt{y^2+\varepsilon^2}+\varepsilon} < |y| \le 1 \quad\Longrightarrow\quad \|f_\varepsilon|C[-1,1]\| \le 1 \\[2ex] |f'_\varepsilon(y)| = \dfrac{|y|}{\sqrt{y^2+\varepsilon^2}} < 1, \quad f'_\varepsilon(0)=0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\|f_\varepsilon|C^1[-1,1]\right\| \le 2 \quad \forall\, \varepsilon \in (0,1]$$

$$f''_\varepsilon(y) = \frac{\varepsilon^2}{(y^2+\varepsilon^2)^{3/2}} \quad\Longrightarrow\quad f''_\varepsilon(0) = \frac{1}{\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon\downarrow 0]{} \infty$$



$$
\begin{aligned}
\left(V_\varepsilon f_\varepsilon\right)(x) &= \int_{-1}^{1} \frac{x}{x^2+y^2+\varepsilon^2}\left[\sqrt{y^2+\varepsilon^2}-\varepsilon\right] \mathrm{d}y \\
\left(V_\varepsilon f_\varepsilon\right)'(x) &= \int_{-1}^{1} \frac{y^2-x^2+\varepsilon^2}{(x^2+y^2+\varepsilon^2)^2}\left[\sqrt{y^2+\varepsilon^2}-\varepsilon\right] \mathrm{d}y \\
\left(V_\varepsilon f_\varepsilon\right)'(0) &= \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{y^2+\varepsilon^2}-\varepsilon}{y^2+\varepsilon^2}\,\mathrm{d}y \;=\; 2\int_0^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{\sqrt{u^2+1}-1}{u^2+1}\,\mathrm{d}u \;=\; 2\underbrace{\int_0^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2+1}}}_{>\int_0^{1/\varepsilon}\frac{\mathrm{d}u}{u+1} \,=\, \ln\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)} - 2\underbrace{\int_0^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{\mathrm{d}u}{u^2+1}}_{<\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}u}{u^2+1} \,=\, \frac{\pi}{2}} \\
&> 2\,\ln\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right) - \pi \;>\; 2\,\ln\left(\frac{1}{10\varepsilon}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad \left\|V_\varepsilon|C^1[-1,1] \longrightarrow C^1[-1,1]\right\| &= \sup_{f\neq 0}\frac{\|V_\varepsilon f|C^1[-1,1]\|}{\|f|C^1[-1,1]\|} \;\geq\; \frac{\|V_\varepsilon f_\varepsilon|C^1[-1,1]\|}{\|f_\varepsilon|C^1[-1,1]\|} \\
&\geq \frac{1}{2}\left\|V_\varepsilon f_\varepsilon|C^1[-1,1]\right\| \;\geq\; \frac{1}{2}\max_{x\in[-1,1]}\left|\left(V_\varepsilon f_\varepsilon\right)'(x)\right| \\
&\geq \frac{1}{2}\left|\left(V_\varepsilon f_\varepsilon\right)'(0)\right| \;>\; \ln\left(\frac{1}{10\varepsilon}\right) \;\xrightarrow[\varepsilon\downarrow 0]{}\; \infty \qquad \square
\end{aligned}
$$

2 Der Satz von Riesz-Thorin

Seien $(X,\mathfrak{X},\mu)$, $(Y,\mathfrak{Y},\nu)$ vollständige Maßräume, μ, ν ... σ-endliche Maße, z.B. $(\mathbb{R}^n,\mathfrak{B},\ell_n)$; betrachten $L_p(X,\mu)$ bzw. $L_p(Y,\nu)$, $1\leq p\leq\infty$, für μ-, ν-messbare Funktionen $f: X, Y \longrightarrow \mathbb{C}$

Satz 1 (Konvexitätssatz von Riesz/Thorin)
Seien $1\leq p_0,p_1,q_0,q_1\leq\infty$, $p_0\neq p_1$, $q_0\neq q_1$, *und* $A: L_{p_i}(X,\mu)\longrightarrow L_{q_i}(Y,\nu)$, $i=0,1$, *linear und stetig. Dann gilt für* $0<\theta<1$,

$$A: L_p(X,\mu)\longrightarrow L_q(Y,\nu) \quad \textit{linear und stetig,}$$

wobei

$$\frac{1}{p} := \frac{1-\theta}{p_0}+\frac{\theta}{p_1}, \qquad \frac{1}{q} := \frac{1-\theta}{q_0}+\frac{\theta}{q_1}$$

definiert sind. Für die Normen erhält man die Abschätzung

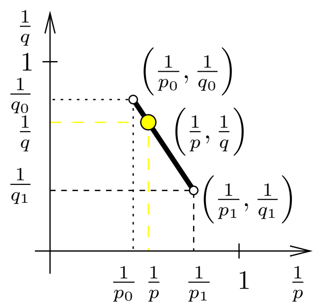
$$\|A: L_p(X,\mu)\to L_q(Y,\nu)\| \leq \|A: L_{p_0}(X,\mu)\to L_{q_0}(Y,\nu)\|^{1-\theta}\;\|A: L_{p_1}(X,\mu)\to L_{q_1}(Y,\nu)\|^{\theta}\;. \qquad (1)$$

Bemerkung :

- Beweis Riesz 1926, Thorin 1939/48
- „Konvexitätssatz“ : sei

$$M := \|A: L_p(X,\mu)\longrightarrow L_q(Y,\nu)\|$$

⇢ (1) bedeutet, dass M *logarithmisch konvex* [11]ist; ⇢ *siehe auch Skizze*



[11]Eine positive Funktion f heißt „logarithmisch konvex“ $\Longleftrightarrow$ $g=\log f$ konvex $\Longleftrightarrow$ $\forall\, x,y \;\; \forall\, \lambda, 0\leq\lambda\leq 1:$ $g\left(\lambda x+(1-\lambda)y\right)\leq\lambda g(x)+(1-\lambda)g(y)$ $\Longleftrightarrow$ $\forall\, x,y \;\; \forall\, \lambda, 0\leq\lambda\leq 1:\; f\left(\lambda x+(1-\lambda)y\right)\leq f(x)^{\lambda}\cdot f(y)^{1-\lambda}$

B e w e i s : Beweis von Thorin à la [BL76, Thm. 1.1.1]

<u>1. Schritt</u> : Treppenfunktionen (einfache Funktionen) liegen dicht in $L_p = L_p(X,\mu)$, $L_q = L_q(Y,\nu)$, $1 \le p,q \le \infty \implies$ ausreichend, Beweis dafür zu führen

Seien $0<\theta<1$, $p_0 \neq p_1$, $q_0 \neq q_1 \implies 1<p<\infty, 1<q<\infty$; q' gegeben durch $\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1 \implies 1<q'<\infty \implies (L_{q'})' = L_q$ (Dualität)

setzen

$$\langle h,g\rangle := \int\limits_Y h(y)g(y)\nu(\,\mathrm{d}y) \implies \|h|L_q\| = \big\|h|\,(L_{q'})'\big\| = \sup\{|\langle h,g\rangle| : \|g|L_{q'}\|=1\}$$

$$\begin{aligned}\implies \|A : L_p \to L_q\| &= \sup_{f\neq 0}\frac{\|Af|L_q\|}{\|f|L_p\|} = \sup_{\|f|L_p\|=1} \underbrace{\|Af|L_q\|}_{\sup\{|\langle Af,g\rangle|:\|g|L_{q'}\|=1\}} \\ &= \sup\{|\langle Af,g\rangle| : \|g|L_{q'}\|=1,\ \|f|L_p\|=1\}\end{aligned} \tag{2}$$

Seien

$$f := \sum_{j=1}^m a_j \chi_{A_j}, \quad a_j\in\mathbb{C}, \quad A_j\subset X,\ A_j\in\mathfrak{X}, \quad A_j\cap A_i=\emptyset,\ j\neq i, \quad \mu(A_j)<\infty, \quad j=1,\dots,m,$$

und

$$g := \sum_{\ell=1}^k b_\ell \chi_{B_\ell}, \quad b_\ell\in\mathbb{C}, \quad B_\ell\subset Y,\ B_\ell\in\mathfrak{Y}, \quad B_\ell\cap B_r=\emptyset,\ \ell\neq r, \quad \nu(B_\ell)<\infty, \quad \ell=1,\dots,k,$$

einfache (messbare) Funktionen mit $\|f|L_p\| = \|g|L_{q'}\| = 1 \quad \curvearrowright$

$$1 = \|f|L_p\|^p \underset{A_j \text{ paarw. disj.}}{=} \sum_{j=1}^m |a_j|^p\ \mu(A_j) = \sum_{\ell=1}^k |b_\ell|^{q'}\ \nu(B_\ell) = \|g|L_{q'}\|^{q'} = 1 \tag{3}$$

Sei $z\in\mathbb{C}$ mit $0\le \Re\mathrm{e}\, z \le 1$, definieren $p(z)$, $q(z)$ durch

$$\frac{1}{p(z)} := \frac{1-z}{p_0}+\frac{z}{p_1}\,, \qquad \frac{1}{q'(z)} := \frac{1-z}{q_0'}+\frac{z}{q_1'}$$

und Funktionen $\varphi(x,z)$, $\psi(y,z)$ durch

$$\varphi(x,z) := |f(x)|^{\frac{p}{p(z)}}\ \frac{f(x)}{|f(x)|} \underset{\text{disj.}}{=} \sum_{j=1}^m |a_j|^{\frac{p}{p(z)}-1}\ a_j\ \chi_{A_j}(x) = \sum_{j=1}^m |a_j|^{\frac{p}{p_0}(1-z)+\frac{p}{p_1}z-1}\ a_j\ \chi_{A_j}(x),$$

$$\psi(y,z) := |g(y)|^{\frac{q'}{q'(z)}}\ \frac{g(y)}{|g(y)|} \underset{\text{disj.}}{=} \sum_{\ell=1}^k |b_\ell|^{\frac{q'}{q'(z)}-1}\ b_\ell\ \chi_{B_\ell}(y) = \sum_{\ell=1}^k |b_\ell|^{\frac{q'}{q_0'}(1-z)+\frac{q'}{q_1'}z-1}\ b_\ell\ \chi_{B_\ell}(y)$$

z fest $\implies \varphi(\cdot,z)\in L_{p_i}$, $\psi(\cdot,z)\in L_{q_i'}$, $i=0,1$ (einfache Funktionen)
$A : L_{p_i} \longrightarrow L_{q_i}$ linear & stetig $\underset{\varphi(\cdot,z)\,\in\, L_{p_i}}{\implies} A\varphi(\cdot,z)\in L_{q_i}$, $i=0,1$
außerdem gilt : $p(\theta)=p$, $q'(\theta)=q'$

$$\implies \varphi(x,\theta)=f(x), \qquad \psi(y,\theta)=g(y) \tag{4}$$

2. Schritt : betrachten

$$F(z) := \int_Y \underbrace{(A\varphi)(y,z)}_{\in L_{q_i}} \underbrace{\psi(y,z)}_{\in L_{q_i'}} \nu(\mathrm{d}y) \quad \dashrightarrow \quad \text{wohldefiniert für jedes feste } z$$

$$= \int_Y \underbrace{\left(\sum_{j=1}^m |a_j|^{\frac{p}{p_0}(1-z)+\frac{p}{p_1}z-1} a_j \left(A\chi_{A_j}\right)(y)\right)}_{(A\varphi)(y,z)} \underbrace{\left(\sum_{\ell=1}^k |b_\ell|^{\frac{q'}{q_0'}(1-z)+\frac{q'}{q_1'}z-1} b_\ell\, \chi_{B_\ell}(y)\right)}_{\psi(y,z)} \nu(\mathrm{d}y)$$

$$= \sum_{j=1}^m \sum_{\ell=1}^k |a_j|^{\frac{p}{p_0}(1-z)+\frac{p}{p_1}z} |b_\ell|^{\frac{q'}{q_0'}(1-z)+\frac{q'}{q_1'}z} \frac{a_j}{|a_j|} \frac{b_\ell}{|b_\ell|} \underbrace{\int_Y \overbrace{\left(A\chi_{A_j}\right)}^{\in L_{q_i}, \chi_{A_j} \in L_{p_i}} (y)\, \overbrace{\chi_{B_\ell}}^{\in L_{q_i'}}(y)\, \nu(\mathrm{d}y)}_{<\infty}$$

$\Longrightarrow$ $F(z)$ stetig und beschränkt auf $\overline{\{z \in \mathbb{C} : 0 < \Re\mathrm{e}\, z < 1\}}$, analytisch in $\{z \in \mathbb{C} : 0 < \Re\mathrm{e}\, z < 1\}$

$\boxed{\text{z.z.}}$: $|F(it)| \le \|A : L_{p_0} \longrightarrow L_{q_0}\|$, $\quad |F(1+it)| \le \|A : L_{p_1} \longrightarrow L_{q_1}\|$

dazu :
$$\|\varphi(\cdot,it)|L_{p_0}\|^{p_0} = \sum_{j=1}^m \left| |a_j|^{\frac{p}{p_0}(1-it)+\frac{p}{p_1}it-1} |a_j| \right|^{p_0} \mu(A_j) = \sum_{j=1}^m |a_j|^p \mu(A_j) \underset{(3)}{=} 1$$

$$\left\|\psi(\cdot,it)|L_{q_0'}\right\|^{q_0'} = \sum_{\ell=1}^k \left| |b_\ell|^{\frac{q'}{q_0'}(1-it)+\frac{q'}{q_1'}it-1} |b_\ell| \right|^{q_0'} \nu(B_\ell) = \sum_{\ell=1}^k |b_\ell|^{q'} \nu(B_\ell) \underset{(3)}{=} 1$$

$$\Longrightarrow \quad |F(it)| = \left| \int_Y (A\varphi)(y,it)\, \psi(y,it) \nu(\mathrm{d}y) \right| = |\langle\, (A\varphi)(\cdot,it), \psi(\cdot,it)\, \rangle|$$
$$\le \|(A\varphi)(\cdot,it)|L_{q_0}\| \underbrace{\left\|\psi(\cdot,it)|L_{q_0'}\right\|}_{1} \le \|A : L_{p_0} \longrightarrow L_{q_0}\| \underbrace{\|\varphi(\cdot,it)|L_{p_0}\|}_{1}$$
$$= \|A : L_{p_0} \longrightarrow L_{q_0}\|$$

analog :
$$\|\varphi(\cdot,1+it)|L_{p_1}\|^{p_1} = \sum_{j=1}^m \left| |a_j|^{\frac{p}{p_0}(-it)+\frac{p}{p_1}(1+it)-1} |a_j| \right|^{p_1} \mu(A_j) = \sum_{j=1}^m |a_j|^p \mu(A_j) \underset{(3)}{=} 1$$

$$\left\|\psi(\cdot,1+it)|L_{q_1'}\right\|^{q_1'} = \sum_{\ell=1}^k \left| |b_\ell|^{\frac{q'}{q_0'}(-it)+\frac{q'}{q_1'}(1+it)-1} |b_\ell| \right|^{q_1'} \nu(B_\ell) = \sum_{\ell=1}^k |b_\ell|^{q'} \nu(B_\ell) \underset{(3)}{=} 1$$

$$\Longrightarrow |F(1+it)| = \left| \int_Y (A\varphi)(y,1+it)\, \psi(y,1+it) \nu(\mathrm{d}y) \right| = |\langle\, (A\varphi)(\cdot,1+it), \psi(\cdot,1+it)\, \rangle|$$
$$\le \|(A\varphi)(\cdot,1+it)|L_{q_1}\| \underbrace{\left\|\psi(\cdot,1+it)|L_{q_1'}\right\|}_{1} \le \|A : L_{p_1} \longrightarrow L_{q_1}\| \underbrace{\|\varphi(\cdot,1+it)|L_{p_1}\|}_{1}$$
$$= \|A : L_{p_1} \longrightarrow L_{q_1}\|$$

$\boxed{\text{g.z.z.}}$: $|F(\theta)| \;\leq\; \|A : L_{p_0} \longrightarrow L_{q_0}\|^{1-\theta}\, \|A : L_{p_1} \longrightarrow L_{q_1}\|^{\theta}$ $(*)$

$$\underset{(4)}{\Longrightarrow} \quad |\langle Af, g\rangle| \;=\; \Big| \int\limits_Y (Af)\,(y)\; g(y)\nu(\,\mathrm{d}y)\Big| \;=\; \Big| \int\limits_Y \underbrace{(A\varphi)\,(y,\theta)}_{(Af)(y)}\; \underbrace{\psi(y,\theta)}_{g(y)}\,\nu(\,\mathrm{d}y)\Big| \;=\; |F(\theta)|$$

$$\underset{(*)}{\leq} \quad \|A : L_{p_0} \longrightarrow L_{q_0}\|^{1-\theta}\, \|A : L_{p_1} \longrightarrow L_{q_1}\|^{\theta}$$

für alle (einfachen Funktionen) $f \in L_p,\ \|f|L_p\| = 1$, und $g \in L_{q'},\ \|g|L_{q'}\| = 1$

$$\underset{\sup,\ (2)}{\Longrightarrow} \quad \|A : L_p \longrightarrow L_q\| \;\leq\; \|A : L_{p_0} \longrightarrow L_{q_0}\|^{1-\theta}\; \|A : L_{p_1} \longrightarrow L_{q_1}\|^{\theta}$$

<u>3. Schritt</u> : zeigen $(*)$, d.h. sei $F(z)$ stetig und beschränkt auf $\overline{\{z \in \mathbb{C} : 0 < \Re\mathrm{e}\, z < 1\}}$, analytisch in $\{z \in \mathbb{C} : 0 < \Re\mathrm{e}\, z < 1\}$, mit $|F(it)| \;\leq\; M_0$, $|F(1+it)| \;\leq\; M_1$ für alle $t \in \mathbb{R}$

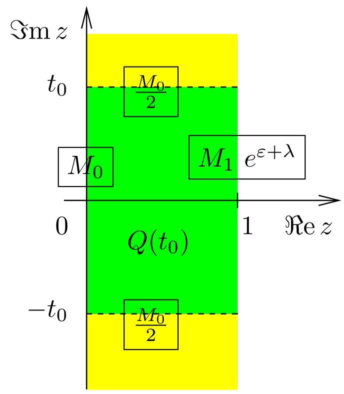
$$\underset{\text{z.z.}}{\Longrightarrow} \quad |F(\theta)| \;\leq\; M_0^{1-\theta}\; M_1^{\theta} \qquad \text{für beliebige} \quad \theta \in [0,1]$$

(*„Drei-Linien-Satz“*, [BL76, Lemma 1.1.2])

Seien $\varepsilon > 0,\ \lambda \in \mathbb{R},\ \ F_\varepsilon(z) := e^{\varepsilon z^2 + \lambda z}\ F(z)$

$$\underset{0\,<\,\Re\mathrm{e}\, z\,<\,1}{\Longrightarrow} \quad |F_\varepsilon(z)| = e^{\varepsilon\left((\Re\mathrm{e}\, z)^2 - (\Im\mathrm{m}\, z)^2\right) + \lambda \Re\mathrm{e}\, z}\, \underbrace{|F(z)|}_{\leq c} \;\leq\; C\ e^{-\varepsilon(\Im\mathrm{m}\, z)^2} \underset{\Im\mathrm{m}\, z\, \to\, \pm\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\Longrightarrow \quad |F_\varepsilon(x \pm it)| \;\leq\; \frac{M_0}{2} \quad \text{für} \quad 0 < x < 1,\ \ t \geq t_0$$



$$|F_\varepsilon(it)| \;=\; \underbrace{e^{-\varepsilon t^2}}_{\leq 1}\, \underbrace{|F(it)|}_{\leq M_0} \;\leq\; M_0,$$

$$|F_\varepsilon(1+it)| \;=\; \underbrace{e^{\varepsilon(1-t^2)+\lambda}}_{\leq e^{\varepsilon+\lambda}}\, \underbrace{|F(1+it)|}_{\leq M_1} \;\leq\; M_1\ e^{\varepsilon+\lambda}$$

$\Longrightarrow$ $F_\varepsilon(z)$ holomorph in

$$Q(t_0) := \{z \in \mathbb{C} : 0 < \Re\mathrm{e}\, z < 1,\ -t_0 < \Im\mathrm{m}\, z < t_0\} \subset \mathbb{C}\ ,$$

stetig auf $\overline{Q(t_0)}$

$$\Longrightarrow \quad |F_\varepsilon(z)| \;\leq\; \max_{w \in \partial Q(t_0)} |F_\varepsilon(w)| \;=\; \max\left(M_0, M_1\ e^{\varepsilon+\lambda}\right)$$

$$\Longrightarrow \quad |F(\theta + it)| = \underbrace{\left|e^{-\varepsilon(\theta+it)^2 - \lambda(\theta+it)}\right|}_{e^{-\varepsilon(\theta^2 - t^2) - \lambda\theta}} \quad \underbrace{|F_\varepsilon(\theta+it)|}_{\leq \max(M_0, M_1\ e^{\varepsilon+\lambda})} \;\leq\; e^{-\varepsilon\theta^2 + \varepsilon t^2}\ \max\left(M_0\ e^{-\lambda\theta}, M_1\ e^{\varepsilon + \lambda(1-\theta)}\right)$$

für alle $\varepsilon > 0,\ \ 0 < \theta < 1,\ \ t \in \mathbb{R}$

$$\underset{t\,=\,0,\ \varepsilon\,\downarrow\,0}{\Longrightarrow} \quad |F(\theta)| \leq \max\left(M_0\ e^{-\lambda\theta}, M_1\ e^{\lambda(1-\theta)}\right) \underset{\varrho\,:=\,e^{\lambda}}{=} \max\left(M_0\ \varrho^{-\theta}, M_1\ \varrho^{1-\theta}\right)$$

Minimum für $M_0\ \varrho^{-\theta} = M_1\ \varrho^{1-\theta} \iff \varrho = \dfrac{M_0}{M_1} \Longrightarrow |F(\theta)| \leq M_0 \underbrace{\left(\dfrac{M_0}{M_1}\right)}_{\varrho}^{-\theta} = M_0^{1-\theta} M_1^{\theta}$ $\square$

Anwendungen

betrachten jetzt $(X,\mathfrak{X},\mu) = (\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}, \ell_n)$, $L_p = L_p(\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}, \ell_n)$, $1 \le p \le \infty$

(Wiederholung) Fourier-Transformation : Sei $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ der *Schwartz*[12]-Raum der schnell fallenden Funktionen, d.h. die Gesamtheit aller C^∞-Funktionen $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$, für die gilt

$$\forall\ k \in \mathbb{N}_0 \quad \forall\ \ell \in \mathbb{N}_0\ :\ \|\varphi\|_{k,\ell} := \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1+|x|)^k \sum_{|\alpha|\le\ell} |\mathrm{D}^\alpha \varphi(x)| < \infty\ ,$$

wobei $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$, $\mathrm{D}^\alpha = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$

Dann definiert man die *Fourier*[13]-Transformation $\mathcal{F}$ durch

$$(\mathcal{F}\varphi)(\xi) = \widehat{\varphi}(\xi) := (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi}\ \varphi(x)\ \mathrm{d}x\ , \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$

mit $x\xi = \langle x, \xi\rangle = \sum_{k=1}^n x_k \xi_k$

bekannt :

- $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$
- $\mathrm{D}^\alpha (\mathcal{F}\varphi)(\xi) = (-i)^{|\alpha|}\ \mathcal{F}(x^\alpha \varphi(x))$, $\quad \xi^\alpha (\mathcal{F}\varphi)(\xi) = (-i)^{|\alpha|}\ \mathcal{F}(\mathrm{D}^\alpha \varphi(x))$
- Umkehrfunktion : $\mathcal{F}^{-1} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\left(\mathcal{F}^{-1}\varphi\right)(\xi) = (\mathcal{F}\varphi)(-\xi)$,

$$\left(\mathcal{F}^{-1}\varphi\right)(\xi) = \overset{\vee}{\varphi}(\xi) := (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi}\ \varphi(x)\ \mathrm{d}x\ , \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$

- $\mathcal{F} : L_1 \longrightarrow L_\infty$,

$$|(\mathcal{F}\varphi)(\xi)| \le (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|\ \mathrm{d}x}_{\|\varphi|L_1\|} \implies \|\mathcal{F} : L_1 \longrightarrow L_\infty\| \le (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \tag{5}$$

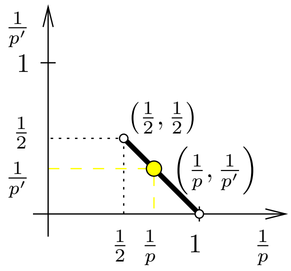
- Formel von *Plancherel*[14]/ *Parseval*[15]: $\mathcal{F} : L_2 \longrightarrow L_2$ unitär,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |(\mathcal{F}f)(\xi)|^2\ \mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}^n} |f(\xi)|^2\ \mathrm{d}\xi \qquad \forall\ f \in L_2 \implies \|\mathcal{F} : L_2 \longrightarrow L_2\| = 1 \tag{6}$$

Folgerung 1 (Hausdorff-Young[16]-Ungleichung)
Seien $1 \le p \le 2$ und p' gegeben durch $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Dann ist $\mathcal{F} : L_p \longrightarrow L_{p'}$ ein linearer und beschränkter Operator, für den gilt

$$\|\mathcal{F} : L_p \longrightarrow L_{p'}\| \le (2\pi)^{-n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)}\ . \tag{7}$$

[12] Laurent Schwartz (* 5.3.1915 Paris † 4.7.2002)
[13] Jean Baptiste Joseph Fourier (* 21.3.1768 Auxerre, Bourgogne/Frankreich † 16.5.1830 Paris)
[14] Michel Plancherel (* 16.1.1885 Freiburg/Schweiz † 4.3.1967 Zürich)
[15] Marc-Antoine Parseval des Chênes (* 27.4.1755 Rosières-aux-Saline/Frankreich † 16.8.1836 Paris)
[16] William Henry Young (* 20.10.1863 London † 7.7.1942 Lausanne)



B e w e i s : 1. Schritt : $p = 1 \Rightarrow p' = \infty$, d.h. (5) $\Longleftrightarrow$ (7), $p = 2 \Rightarrow p' = 2$, d.h. (6) $\Longleftrightarrow$ (7)

2. Schritt : sei jetzt $1 < p < 2$, wenden Satz 1 an mit $p_0 = 1$, $q_0 = \infty$, $p_1 = q_1 = 2$, und θ so gewählt, dass $p_\theta = p$ gilt, d.h.

$$\underbrace{\frac{1}{p}}_{\frac{1}{2} < \,\cdot\, < 1} \stackrel{!}{=} \frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{1} + \frac{\theta}{2} = 1 - \frac{\theta}{2} \quad \Longrightarrow \quad \theta = 2\underbrace{\left(1 - \frac{1}{p}\right)}_{0< \,\cdot\, <1} = \frac{2}{p'}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{q_\theta} = \underbrace{\frac{1-\theta}{\infty}}_{0} + \frac{\theta}{2} = \frac{1}{p'} \quad \Longleftrightarrow \quad q_\theta = p' \quad \underset{\text{Satz 1, (5),(6)}}{\Longrightarrow} \quad \mathcal{F} : \underbrace{L_p}_{L_{p_\theta}} \longrightarrow \underbrace{L_{p'}}_{L_{q_\theta}} \quad \text{mit}$$

$$\|\mathcal{F} : L_p \longrightarrow L_p'\| \leq \underbrace{\|\mathcal{F} : L_1 \longrightarrow L_\infty\|^{1-\theta}}_{\leq (2\pi)^{-\frac{n}{2}(1-\theta)}} \underbrace{\|\mathcal{F} : L_2 \longrightarrow L_2\|^{\theta}}_{1^\theta = 1} \leq (2\pi)^{-\frac{n}{2}(1-\theta)} = (2\pi)^{-n\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right)}$$

$\square$

Faltungsoperator : $\mathcal{K}$ gegeben durch

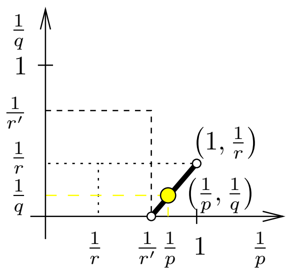
$$(\mathcal{K}f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} k(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} k(y)f(x-y)\,\mathrm{d}y = (k * f)(x)\,, \quad x \in \mathbb{R}^n\,.$$

Bemerkung : bekannt : $\mathcal{F}(\varphi * \psi) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} (\mathcal{F}\varphi)(\mathcal{F}\psi)$, $\left(\mathcal{F}^{-1}\varphi\right) * \left(\mathcal{F}^{-1}\psi\right) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \mathcal{F}^{-1}(\varphi\psi)$

Folgerung 2 (Young-Ungleichung)
Seien $1 \leq r \leq \infty$, $k \in L_r$, *und* $1 \leq p \leq r'$ *gegeben, wobei* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$ *ist. Dann gilt*

$$\mathcal{K} : L_p \longrightarrow L_q \quad \text{mit} \quad \|\mathcal{K} : L_p \longrightarrow L_q\| \leq \|k|L_r\|\,, \tag{8}$$

wobei q *durch* $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{r'} = \frac{1}{r} - \frac{1}{p'} = \frac{1}{r} + \frac{1}{p} - 1$ *gegeben ist.*



Bemerkung : (8) liefert für $k \in L_r$:

$$\|k * f|L_q\| \leq \|f|L_p\| \; \|k|L_r\|$$

für alle $f \in L_p$

B e w e i s : 1. Schritt : z.z. $\mathcal{K} : L_{r'} \longrightarrow L_\infty$, $\|\mathcal{K} : L_{r'} \rightarrow L_\infty\| \leq \|k|L_r\|$

$$r \geq 1 \quad \Longrightarrow \quad \|\mathcal{K}f|L_\infty\| = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} k(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y \right| \underset{\substack{\text{Hölder} \\ 1/(1)}}{\leq} \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}^n} \underbrace{\|k(x-\cdot)|L_r\|}_{\|k|L_r\|} \; \|f|L_{r'}\|$$

$$\leq \|k|L_r\| \; \|f|L_{r'}\|$$

2. Schritt : z.z. $\mathcal{K} : L_1 \longrightarrow L_r$, $\|\mathcal{K} : L_1 \rightarrow L_r\| \leq \|k|L_r\|$

$$\|\mathcal{K}f|L_r\| = \left\| \int_{\mathbb{R}^n} k(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y \Big| L_r \right\| \underset{\text{s.u.}^{17}}{\leq} \int_{\mathbb{R}^n} \|k(\cdot - y)f(y)|L_r\|\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \underbrace{\|k(\cdot - y)|L_r\|}_{\|k|L_r\|}\,\mathrm{d}y$$

$$= \|k|L_r\| \; \|f|L_1\|$$

[17] verallgemeinerte Dreiecksungleichung für Integrale, $\left(\int\left[\int|\varphi(x,y)|\,\mathrm{d}y\right]^r \mathrm{d}x\right)^{1/r} \leq \int\left[\int|\varphi(x,y)|^r\,\mathrm{d}x\right]^{1/r} \mathrm{d}y$, $r > 1$; siehe z.B. [HLP52, Thm. 202, p. 148]

<u>3. Schritt</u> : sei jetzt $1 < p < r'$, wenden Satz 1 an mit $p_0 = r'$, $q_0 = \infty$, $p_1 = 1$, $q_1 = r$, und θ so gewählt, dass $p_\theta = p$ gilt, d.h.

$$\underbrace{\frac{1}{p}}_{\frac{1}{r'} < \cdot < 1} \overset{!}{=} \frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{r'} + \frac{\theta}{1} = \frac{1}{r'} + \frac{\theta}{r} \implies \theta = r \underbrace{\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{r'}\right)}_{0 < \cdot < 1 - \frac{1}{r'} = \frac{1}{r}} \implies \frac{1}{q_\theta} = \underbrace{\frac{1-\theta}{\infty}}_{0} + \frac{\theta}{r} = \frac{1}{p} - \frac{1}{r'} = \frac{1}{q}$$

$$\underset{\substack{\text{Satz 1,}\\ \text{1. \& 2. Schritt}}}{\implies} \mathcal{K} : \underbrace{L_p}_{L_{p_\theta}} \longrightarrow \underbrace{L_q}_{L_{q_\theta}} \quad \text{mit} \quad \|\mathcal{K} : L_p \longrightarrow L_q\| \leq \underbrace{\|\mathcal{K} : L_{r'} \longrightarrow L_\infty\|^{1-\theta}}_{\leq \|k|L_r\|^{1-\theta}} \underbrace{\|\mathcal{K} : L_1 \longrightarrow L_r\|^{\theta}}_{\leq \|k|L_r\|^{\theta}} \leq \|k|L_r\|$$

$\square$

3 Grundbegriffe

Definition 1 *Seien A_0, A_1, B_0 und B_1 (komplexe) Banach-Räume. Dann heißen $\{A_0, A_1\}$ und $\{B_0, B_1\}$* Interpolationspaare *von Banach-Räumen, falls lineare Hausdorff-Räume $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ existieren, so dass $A_i \hookrightarrow \mathcal{A}$, $B_i \hookrightarrow \mathcal{B}$, $i = 0, 1$, gelten.*

Bemerkung : $U \hookrightarrow V \iff \underbrace{\{\forall\, u \in U \;:\; u \in V\}}_{U \subset V} \wedge \underbrace{\{\exists\, c > 0\ \forall\, u \in U \;: \|u|V\| \leq c\, \|u|U\|\}}_{\mathrm{id} \in \mathcal{L}(U,V)}$

Lemma 1 *Sei $\{A_0, A_1\}$ ein Interpolationspaar. Dann sind*

$$A_0 + A_1 := \{a \in \mathcal{A} :\ \exists\, a_0 \in A_0,\ a_1 \in A_1 \;:\; a = a_0 + a_1\}\ ,$$

mit

$$\|a|A_0 + A_1\| := \inf_{\substack{a = a_0 + a_1\\ a_i \in A_i}} (\|a_0|A_0\| + \|a_1|A_1\|)$$

und $A_0 \cap A_1$ mit der Norm

$$\|a|A_0 \cap A_1\| := \max\left(\|a|A_0\|\,,\ \|a|A_1\|\right)$$

Banach-Räume; es gilt

$$A_0 \cap A_1 \hookrightarrow A_i \hookrightarrow A_0 + A_1\ , \quad i = 0, 1. \tag{1}$$

B e w e i s : *klar* : $\|\cdot|A_0 \cap A_1\|$ Norm, Einbettungen (1)

$\boxed{\text{z.z.}}$: (i) $\|a|A_0 + A_1\| = 0 \implies a = 0$, (ii) $A_0 \cap A_1$, $A_0 + A_1$ vollständig

$\boxed{\text{zu (i)}}$: sei $a \in A_0 + A_1$, $\|a|A_0 + A_1\| = 0$

$$\underset{\inf}{\implies} \forall\, n \in \mathbb{N} \quad \exists\, a_0^n \in A_0,\ a_1^n \in A_1 \;: a = a_0^n + a_1^n, \quad \|a_0^n|A_0\| + \|a_1^n|A_1\| \leq \underbrace{\|a|A_0 + A_1\|}_{0} + \frac{1}{n} = \frac{1}{n}$$

$$\underset{\|\cdot|A_i\| \geq 0}{\implies} a_i^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \text{ in } A_i,\ i = 0,1 \underset{A_i \hookrightarrow \mathcal{A}}{\implies} a_i^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \text{ in } \mathcal{A} \frown \underbrace{a_0^n + a_1^n}_{a} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \text{ in } \mathcal{A} \iff a = 0$$

$\boxed{\text{zu (ii)}}$: Vollständigkeit von $A_0 \cap A_1$

Sei $\{a_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folge in $A_0 \cap A_1 \implies \{a_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folge in A_i, $i = 0, 1$

$$\underset{A_i \text{ vollständig}}{\implies} \exists\, \alpha_i \in A_i \;:\; a_m \xrightarrow[m\to\infty]{} \alpha_i \quad \text{in} \quad A_i,\ i = 0,1 \underset{A_i \hookrightarrow \mathcal{A}}{\implies} a_m \xrightarrow[m\to\infty]{} \alpha_i \quad \text{in} \quad \mathcal{A},\ i = 0,1$$

$$\underset{\mathcal{A} \text{ Hausdorff}}{\implies} \underbrace{\alpha_0}_{\in A_0} = \lim_{m\to\infty} a_m = \underbrace{\alpha_1}_{\in A_1} =: \alpha \in A_0 \cap A_1 \iff A_0 \cap A_1 \quad \text{vollständig}$$

Vollständigkeit von $A_0 + A_1$: verwenden folgendes *Lemma*[18] (z.B. [BL76, Lemma 2.2.1]) :

Sei A ein normierter linearer Vektorraum. Dann ist A genau dann vollständig, wenn gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|a_n|A\| < \infty \quad \Longrightarrow \quad \exists\, a \in A \ : \ \Big\|a - \sum_{n=1}^{m} a_n|A\Big\| \xrightarrow[m\to\infty]{} 0 \quad \textit{in } A\ . \qquad (*)$$

Sei $\{a^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folge in $A_0 + A_1$ mit $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|a^n|A_0 + A_1\| < \infty$

$$\underset{\inf}{\Longrightarrow} \ \forall\, n \in \mathbb{N} \quad \exists\, a_0^n \in A_0,\ a_1^n \in A_1 \ : a^n = a_0^n + a_1^n, \quad \|a_0^n|A_0\| + \|a_1^n|A_1\| < \|a^n|A_0 + A_1\| + 2^{-n}$$

$$\curvearrowright \ \sum_{n=1}^{\infty} \|a_i^n|A_i\| < \infty,\ i = 0, 1 \underset{\substack{\text{Lemma } (*) \\ A_i \text{ vollst.}}}{\Longrightarrow} \exists\, \alpha_i \in A_i \ : \ \Big\|\alpha_i - \sum_{n=1}^{m} a_i^n|A_i\Big\| \xrightarrow[m\to\infty]{} 0,\ \ \alpha := \alpha_0 + \alpha_1 \in A_0 + A_1$$

$$\curvearrowright \ \Big\|\alpha - \sum_{n=1}^{m} a^n|A_0 + A_1\Big\| \underset{\inf}{\le} \Big\|\alpha_0 - \sum_{n=1}^{m} a_0^n|A_0\Big\| + \Big\|\alpha_1 - \sum_{n=1}^{m} a_1^n|A_1\Big\| \xrightarrow[m\to\infty]{} 0 \underset{(*)}{\Longrightarrow} A_0 + A_1 \text{ vollständig } \square$$

Bemerkung :

- Beweis à la [BS88, Ch. 3/Thm. 1.3]
- Bezeichnung gelegentlich (z.B. [BL76]) : $\overline{A} := \{A_0, A_1\}$, $\Delta\left(\overline{A}\right) := A_0 \cap A_1$, $\Sigma\left(\overline{A}\right) := A_0 + A_1$

Definition 2 *Seien $\{A_0, A_1\}$ und $\{B_0, B_1\}$ Interpolationspaare von Banach-Räumen. Die Menge aller linearen Operatoren $T : A_0 + A_1 \longrightarrow B_0 + B_1$, deren Einschränkungen*

$$T\big|_{A_i} : A_i \longrightarrow B_i\ , \quad i = 0, 1,$$

stetig sind, d.h. $T\big|_{A_i} \in \mathcal{L}(A_i, B_i)$, $i = 0, 1$, wird als $\mathcal{L}\left(\{A_0, A_1\}, \{B_0, B_1\}\right)$ bezeichnet.

<u>*Bezeichnung*</u> : $\mathcal{L}\left(\{A_0, A_1\}\right) := \mathcal{L}\left(\{A_0, A_1\}, \{A_0, A_1\}\right)$

Lemma 2 *Seien $\{A_0, A_1\}$ und $\{B_0, B_1\}$ Interpolationspaare von Banach-Räumen. Dann ist $\mathcal{L}\left(\{A_0, A_1\}, \{B_0, B_1\}\right)$ mit der Norm*

$$\|T|\mathcal{L}\left(\{A_0, A_1\}, \{B_0, B_1\}\right)\| := \ \max\left(\Big\|T\big|_{A_0}|\mathcal{L}(A_0, B_0)\Big\|, \Big\|T\big|_{A_1}|\mathcal{L}(A_1, B_1)\Big\|\right)$$

ein Banach-Raum, der stetig in $\mathcal{L}(A_0 + A_1, B_0 + B_1)$ eingebettet ist.

Beweis : *à la [BS88, Ch. 3/Prop. 1.7]*

Sei $\mathcal{D} := \{(U, V) : U \in \mathcal{L}(A_0, B_0),\ V \in \mathcal{L}(A_1, B_1),\ U = V$ auf $A_0 \cap A_1\} \subset \mathcal{L}(A_0, B_0) \times \mathcal{L}(A_1, B_1)$ ausgestattet mit der Produktnorm

$$\|(U, V)|\mathcal{L}(A_0, B_0) \times \mathcal{L}(A_1, B_1)\| := \max\left(\|U|\mathcal{L}(A_0, B_0)\|, \|V|\mathcal{L}(A_1, B_1)\|\right)$$

---

[18] Beweis : $\boxed{\Longrightarrow}$: sei A vollständig, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|a_n|A\| < \infty \quad \Longrightarrow \quad \{\sum\limits_{n=1}^{m} a_n\}_m$ Cauchy-Folge in A

$$\underset{A \text{ vollst.}}{\Longrightarrow} \ \exists\, a \in A \ : \ a = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} a_n \ \text{ in } A \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\, a \in A \ : \ \lim_{m\to\infty} \Big\|a - \sum_{n=1}^{m} a_n|A\Big\| = 0 \ \text{ in } A$$

$\boxed{\Longleftarrow}$: sei $\{\alpha_m\}_m$ Cauchy-Folge in $A \quad \Longrightarrow \quad \forall\, k \in \mathbb{N}\ \exists\, \nu =: m_{k+1},\ \ell =: m_k \ : \ \big\|\alpha_{m_{k+1}} - \alpha_{m_k}|A\big\| < \frac{1}{k^2}$

$$\Longrightarrow \ \exists\, \{m_k\}_k \ : \ \sum_{k=1}^{\infty} \big\|\alpha_{m_{k+1}} - \alpha_{m_k}|A\big\| < \infty \underset{\text{Vor.}}{\Longrightarrow} \exists\, a \in A \ : \ a := \sum_{k=1}^{\infty} \left(\alpha_{m_{k+1}} - \alpha_{m_k}\right) \ \text{ in } A$$

$$\Longrightarrow \ \exists \lim_{k\to\infty} \alpha_{m_k} \ \text{ in } A \underset{\{\alpha_m\}_m \text{ Cauchy}}{\Longrightarrow} \exists \lim_{m\to\infty} \alpha_m \ \text{ in } A \quad \Longleftrightarrow \quad A \ \text{ vollständig}$$

$\boxed{\text{z.z.}}$: (i) $\mathcal{D}$ abgeschlossener Teilraum von $\mathcal{L}(A_0,B_0)\times\mathcal{L}(A_1,B_1)$ $\dashrightarrow$ Banach-Raum

(ii) $\mathcal{D}$ isometrisch-isomorph zu $\mathcal{L}(\{A_0,A_1\},\{B_0,B_1\})$

$\boxed{\text{zu (i)}}$: sei $\{(U_n,V_n)\}_n\subset\mathcal{D}$, konvergent in $\mathcal{L}(A_0,B_0)\times\mathcal{L}(A_1,B_1)$, d.h. $\exists\,(U,V)\in\mathcal{L}(A_0,B_0)\times\mathcal{L}(A_1,B_1)$:

$$\|(U-U_n,V-V_n)|\mathcal{L}(A_0,B_0)\times\mathcal{L}(A_1,B_1)\| = \max\left(\|U-U_n|\mathcal{L}(A_0,B_0)\|,\|V-V_n|\mathcal{L}(A_1,B_1)\|\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

$\boxed{\text{g.z.z.}}$: $U=V$ auf $A_0\cap A_1$ $\left[\dashrightarrow (U,V)\in\mathcal{D}\right]$

sei $a\in A_0\cap A_1$ $\implies$ $Ua-Va=(U-U_n)a+(V_n-V)a+\underbrace{\overbrace{(U_n-V_n)\,a}^{\in\mathcal{D}}}_{0}=(U-U_n)a+(V_n-V)a,$

$$\left.\begin{array}{l}(U-U_n)a\xrightarrow[n\to\infty]{}0\quad\text{in}\quad B_0\hookrightarrow B_0+B_1\\ (V_n-V)a\xrightarrow[n\to\infty]{}0\quad\text{in}\quad B_1\hookrightarrow B_0+B_1\end{array}\right\}\implies Ua-Va=\underbrace{(U-U_n)a}_{\to 0}+\underbrace{(V_n-V)a}_{\to 0}\;=\;0\quad\text{in}\quad B_0+B_1$$

$\boxed{\text{zu (ii)}}$: betrachten $j:\mathcal{L}(\{A_0,A_1\},\{B_0,B_1\})\longrightarrow\mathcal{D},\quad j(T)=\left(T\big|_{A_0},T\big|_{A_1}\right)$

$\implies$ j linear, isometrisch, injektiv : $j(T)\equiv 0\iff T\big|_{A_0}\equiv 0,\ T\big|_{A_1}\equiv 0\implies T\big|_{A_0+A_1}\equiv 0$

$\boxed{\text{g.z.z.}}$: j surjektiv; sei $\left(\widetilde{U},\widetilde{V}\right)\in\mathcal{D}$, definieren $\widetilde{T}:A_0+A_1\longrightarrow B_0+B_1$:

$$a\in A_0+A_1\implies\exists\,a_0\in A_0,\ a_1\in A_1\ :a=a_0+a_1\dashrightarrow\widetilde{T}a:=\widetilde{U}a_0+\widetilde{V}a_1$$

$\widetilde{T}$ wohldefiniert : sei $a=\alpha_0+\alpha_1$ $\implies$ $\underbrace{a_0-\alpha_0}_{\in A_0}=\underbrace{\alpha_1-a_1}_{\in A_1}\in A_0\cap A_1$

$$\underset{\left(\widetilde{U},\widetilde{V}\right)\in\mathcal{D}}{\implies}\widetilde{U}(a_0-\alpha_0)=\widetilde{V}(a_0-\alpha_0)=\widetilde{V}(\alpha_1-a_1)\implies\underbrace{\widetilde{U}a_0+\widetilde{V}a_1}_{\widetilde{T}a}=\widetilde{U}\alpha_0+\widetilde{V}\alpha_1\in B_0+B_1$$

$$\implies\widetilde{T}:A_0+A_1\longrightarrow B_0+B_1\ \text{linear},\ \widetilde{T}\big|_{A_0}\equiv\widetilde{U},\ \widetilde{T}\big|_{A_1}\equiv\widetilde{V},\ j\left(\widetilde{T}\right)=\left(\widetilde{U},\widetilde{V}\right)\implies j\ \text{surjektiv}$$

$\boxed{\text{n.z.z.}}$: $\mathcal{L}(\{A_0,A_1\},\{B_0,B_1\})\hookrightarrow\mathcal{L}(A_0+A_1,B_0+B_1)$

Seien $T\in\mathcal{L}(\{A_0,A_1\},\{B_0,B_1\})$, $a\in A_0+A_1$ $\implies$ $\exists\,a_0\in A_0,\ a_1\in A_1\ :\ a=a_0+a_1,$

$$\begin{aligned}\|Ta|B_0+B_1\| &= \inf_{\substack{Ta=b_0+b_1\\ b_i\in B_i}}\left(\|b_0|B_0\|+\|b_1|B_1\|\right)\\ &\underset{\substack{b_0=Ta_0\\ b_1=Ta_1}}{\le}\underbrace{\|Ta_0|B_0\|}_{\le\|T|_{A_0}|\mathcal{L}(A_0,B_0)\|\|a_0|A_0\|}+\underbrace{\|Ta_1|B_1\|}_{\le\|T|_{A_1}|\mathcal{L}(A_1,B_1)\|\|a_1|A_1\|}\\ &\le\max\left(\left\|T\big|_{A_0}|\mathcal{L}(A_0,B_0)\right\|,\left\|T\big|_{A_1}|\mathcal{L}(A_1,B_1)\right\|\right)\left(\|a_0|A_0\|+\|a_1|A_1\|\right)\end{aligned}$$

$$\underset{\text{inf über }a=a_0+a_1}{\implies}\|Ta|B_0+B_1\|\le\max\left(\left\|T\big|_{A_0}|\mathcal{L}(A_0,B_0)\right\|,\left\|T\big|_{A_1}|\mathcal{L}(A_1,B_1)\right\|\right)\|a|A_0+A_1\|$$

$$\implies T\in\mathcal{L}(A_0+A_1,B_0+B_1),\ \|T|\mathcal{L}(A_0+A_1,B_0+B_1)\|\le\|T|\mathcal{L}(\{A_0,A_1\},\{B_0,B_1\})\|\qquad\square$$

Definition 3 *Sei* $\{A_0, A_1\}$ *ein Interpolationspaar von Banach-Räumen.*

(i) *Ein Banach-Raum* $A \hookrightarrow \mathcal{A}$ *heißt* intermediärer Raum (Zwischenraum) *bezüglich* $\{A_0, A_1\}$, *falls gilt*

$$A_0 \cap A_1 \;\hookrightarrow\; A \;\hookrightarrow\; A_0 + A_1\ .$$

(ii) *Ein intermediärer Raum* $A \hookrightarrow \mathcal{A}$ *heißt* Interpolationsraum *bezüglich* $\{A_0, A_1\}$, *falls zusätzlich für alle* $T \in \mathcal{L}\left(\{A_0, A_1\}\right)$ *gilt*

$$T(A) \;\subset\; A\ .$$

Lemma 3 *Seien* U, V, X, Y *Banach-Räume, für die* $U \hookrightarrow X$, $V \hookrightarrow Y$ *stetig eingebettet sind. Sei* $S : U \longrightarrow V$ *ein Operator, für den* $S \in \mathcal{L}(X, Y)$ *gilt. Dann ist* S *stetig, d.h.* $S \in \mathcal{L}(U, V)$.

B e w e i s : à la [BS88, Ch. 3/Lemma 1.9]; verwenden Satz vom abgeschlossenen Graphen[19] (*Beweis siehe z.B.* [Tri92a, Satz 17.1.])

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, dashed, "S"] \arrow[d, hook, "id"'] & V \arrow[d, hook, "id"'] \\ X \arrow[r, "\text{stetig}", "S"'] & Y \end{tikzcd}$$

Sei $\{u_n\}_n \subset U$ konvergent, $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} u$ in U, $Su_n \xrightarrow[n\to\infty]{} v$ in V

$U \hookrightarrow X$, $V \hookrightarrow Y$ $\Longrightarrow$ $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} u$ in X, $Su_n \xrightarrow[n\to\infty]{} v$ in Y,

$S : X \longrightarrow Y$ stetig $\Longrightarrow$ $Su = v$, ($u \in U$ ohnehin)

$\Longrightarrow$ S abgeschlossen $\underset{\text{Satz abg. Graphen}}{\Longrightarrow}$ $S \in \mathcal{L}(U, V)$ $\square$

Folgerung 1 *Sei* A *ein Interpolationsraum bezüglich* $\{A_0, A_1\}$. *Dann gilt für alle* $T \in \mathcal{L}\left(\{A_0, A_1\}\right)$ *auch* $T\big|_A \in \mathcal{L}(A) = \mathcal{L}(A, A)$.

B e w e i s : setzen in Lemma 3 : $U = V = A$, $X = Y = A_0 + A_1$, $S = T$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, dashed, "T"] \arrow[d, hook, "id"'] & A \arrow[d, hook, "id"'] \\ A_0 + A_1 \arrow[r, "\text{stetig}", "T"'] & A_0 + A_1 \end{tikzcd}$$

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Def. 3 (i)} & \Longrightarrow & A \hookrightarrow A_0 + A_1 \\ \text{Def. 3 (ii)} & \Longrightarrow & T : A \longrightarrow A \\ \text{Lemma 2} & \Longrightarrow & T \in \mathcal{L}(A_0 + A_1) \end{array}\right\} \underset{\text{Lemma 3}}{\Longrightarrow} T\big|_A \in \mathcal{L}(A)$$

$\square$

Definition 4 *Seien* $\{A_0, A_1\}$ *und* $\{B_0, B_1\}$ *Interpolationspaare von Banach-Räumen und* $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$ *intermediäre Räume. Falls für alle* $T \in \mathcal{L}\left(\{A_0, A_1\}, \{B_0, B_1\}\right)$ *gilt*

$$T(A) \subset B\ ,$$

so heißt $[\{A_0, A_1\}, A]$ Interpolationstripel *bezüglich* $[\{B_0, B_1\}, B]$.

Folgerung 2 *Sei* $[\{A_0, A_1\}, A]$ *ein Interpolationstripel bezüglich* $[\{B_0, B_1\}, B]$, *dann gilt für alle* $T \in \mathcal{L}\left(\{A_0, A_1\}, \{B_0, B_1\}\right)$ *auch* $T\big|_A \in \mathcal{L}(A, B)$.

B e w e i s : $U = A$, $V = B$, $X = A_0 + A_1$, $Y = B_0 + B_1$, $S = T$

[19]linearer Operator A abgeschlossen $\iff$ $\forall\ \{x_n\}_n \subset D(A)$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim\limits_{n\to\infty} Ax_n = y$: $x \in D(A)$, $y = Ax$
Satz vom abgeschlossenen Graphen : A abgeschlossen, $D(A)$ ganzer Banachraum $\Longrightarrow$ A beschränkt

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, dashed, "T"] \arrow[d, hook, "id"'] & B \arrow[d, hook, "id"'] \\ A_0+A_1 \arrow[r, "\text{stetig}", "T"'] & B_0+B_1 \end{tikzcd} \qquad \left.\begin{array}{lll} \text{Def. 3 (i)} & \Longrightarrow & A \hookrightarrow A_0+A_1,\ B \hookrightarrow B_0+B_1 \\ \text{Def. 4} & \Longrightarrow & T : A \longrightarrow B \\ \text{Lemma 2} & \Longrightarrow & T \in \mathcal{L}(A_0+A_1, B_0+B_1) \end{array}\right\} \underset{\text{Lemma 3}}{\Longrightarrow} T \in \mathcal{L}(A,B)$$

□

Satz 1 *Sei* $[\{A_0, A_1\}, A]$ *ein Interpolationstripel bezüglich* $[\{B_0, B_1\}, B]$*. Dann existiert ein* $c > 0$*, so dass für alle* $T \in \mathcal{L}(\{A_0, A_1\}, \{B_0, B_1\})$ *gilt*

$$\left\| T\big|_A | \mathcal{L}(A,B) \right\| \leq c \max\left(\left\| T\big|_{A_0} | \mathcal{L}(A_0, B_0) \right\|, \left\| T\big|_{A_1} | \mathcal{L}(A_1, B_1) \right\| \right) .$$

B e w e i s : à la [BS88, Ch. 3/Prop 1.11]; wollen Lemma 3 anwenden mit $U = \mathcal{L}(\{A_0, A_1\}, \{B_0, B_1\})$, $V = \mathcal{L}(A,B)$, $X = \mathcal{L}(A_0+A_1, B_0+B_1)$, $Y = \mathcal{L}(A, B_0+B_1)$, $S = R$:

$$R : \mathcal{L}(A_0+A_1, B_0+B_1) \longrightarrow \mathcal{L}(A, B_0+B_1), \quad R(T) := T\big|_A$$

$$\begin{array}{rcll}
\text{Sei } \ a \in A & \Longrightarrow & \left\| T\big|_A a | B_0+B_1 \right\| \leq \left\| T | \mathcal{L}(A_0+A_1, B_0+B_1) \right\| \ \underbrace{\|a|A_0+A_1\|}_{\leq c\ \|a|A\|,\ A \hookrightarrow A_0+A_1} & \\
& \Longrightarrow & \left\| T\big|_A | \mathcal{L}(A, B_0+B_1) \right\| \leq c \left\| T | \mathcal{L}(A_0+A_1, B_0+B_1) \right\| & \\
& \Longrightarrow & R : \mathcal{L}(A_0+A_1, B_0+B_1) \longrightarrow \mathcal{L}(A, B_0+B_1) \quad \text{linear und stetig} & (2) \\
\text{Folg. 2} & \Longrightarrow & R : \mathcal{L}(\{A_0, A_1\}, \{B_0, B_1\}) \longrightarrow \mathcal{L}(A,B) & (3) \\
\text{Lemma 2} & \Longrightarrow & \mathcal{L}(\{A_0, A_1\}, \{B_0, B_1\}) \hookrightarrow \mathcal{L}(A_0+A_1, B_0+B_1) & (4) \\
\text{Sei } \ a \in A & \underset{T|_A \in \mathcal{L}(A,B)}{\Longrightarrow} & \| \underbrace{T\big|_A a}_{\in B} | B_0+B_1 \| \underset{B \hookrightarrow B_0+B_1}{\leq} c' \left\| T\big|_A a | B \right\| \leq c' \left\| T\big|_A | \mathcal{L}(A,B) \right\| \|a|A\| & \\
& \Longrightarrow & \left\| T\big|_A | \mathcal{L}(A, B_0+B_1) \right\| \leq c' \left\| T\big|_A | \mathcal{L}(A,B) \right\| & \\
& \Longrightarrow & \mathcal{L}(A,B) \hookrightarrow \mathcal{L}(A, B_0+B_1) & (5)
\end{array}$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{L}(\{A_0, A_1\}, \{B_0, B_1\}) \arrow[r, dashed, "R", "(3)"'] \arrow[d, hook, "id"', "(4)"] & \mathcal{L}(A,B) \arrow[d, hook, "id"', "(5)"] \\ \mathcal{L}(A_0+A_1, B_0+B_1) \arrow[r, "{\text{stetig}, \ (2)}", "R"'] & \mathcal{L}(A, B_0+B_1) \end{tikzcd}$$

(2), (3), (4), (5) $\underset{\text{Lemma 3}}{\Longrightarrow}$ $R : \mathcal{L}(\{A_0, A_1\}, \{B_0, B_1\}) \longrightarrow \mathcal{L}(A,B)$ linear und stetig,

$$\Big\| \underbrace{T\big|_A}_{R(T)} | \mathcal{L}(A,B) \Big\| \leq c \underbrace{\max\left(\left\| T\big|_{A_0} | \mathcal{L}(A_0, B_0) \right\|, \left\| T\big|_{A_1} | \mathcal{L}(A_1, B_1) \right\| \right)}_{\|T | \mathcal{L}(\{A_0, A_1\}, \{B_0, B_1\})\|}$$

□

Bemerkung :

- $c = c(A,B)$ ... Interpolationskonstante,
  $c = 1 \quad \Longrightarrow \quad$ Interpolationsräume A, B heißen <u>exakt</u>
- siehe z.B. [Tri78, Lemma 1.2.3], [BS88, Ch. 3/Prop 1.11]

Lemma 4 *Für beliebige Interpolationsräume A und B kann man stets in A eine äquivalente Normierung einführen, so dass dann A und B exakt sind.*

Beweis : Definieren

$$\|a\|_A := \max\Big(\|a|A\|,\ \sup\{\|Ta|B\| : \|T|\mathcal{L}(\{A_0,A_1\},\{B_0,B_1\})\| \le 1\}\Big)\,, \quad a \in A$$

$\curvearrowright$ $\|\cdot\|_A$ Norm auf A, $\|a|A\| \le \|a\|_A \le \max\big(c(A,B),1\big)\ \|a|A\|$, $a \in A \iff \|\cdot\|_A \sim \|\cdot|A\|$

$T \in \mathcal{L}(\{A_0,A_1\},\{B_0,B_1\})$, $\|T|\mathcal{L}(\{A_0,A_1\},\{B_0,B_1\})\| \le 1 \implies \|Ta|B\| \le \|a\|_A$, $a \in A$

$\curvearrowright$ $\big(A, \|\cdot\|_A\big)$, $\big(B, \|\cdot|B\|\big)$ exakte Interpolationsräume □

<u>*Verallgemeinerung*</u> : **Kategorien und Interpolationsfunktoren**

Definition 5

(i) *Eine* Kategorie $\mathfrak{C}$ *besteht aus einer Klasse von* Objekten $\mathrm{Ob}(\mathfrak{C})$, *und einer Klasse paarweise disjunkter, nicht-leerer Mengen* $[A,B]$, *die in eineindeutiger Weise* $(A,B) \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{C}) \times \mathrm{Ob}(\mathfrak{C})$ *zugeordnet sind. Die Elemente der Mengen* $[A,B]$ *heißen* Morphismen *von A nach B, die Klasse der Morphismen* $\mathrm{Mor}(\mathfrak{C})$ *ist also*

$$\mathrm{Mor}(\mathfrak{C}) = \bigcup_{(A,B)\in \mathrm{Ob}(\mathfrak{C})\times\mathrm{Ob}(\mathfrak{C})} [A,B]\ .$$

Für alle $(A,B,C) \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{C}) \times \mathrm{Ob}(\mathfrak{C}) \times \mathrm{Ob}(\mathfrak{C})$ *ist eine Operation* $\circ$ *erklärt,*

$$\circ : [B,C] \times [A,B] \longrightarrow [A,C] \iff \forall\, f \in [A,B],\ g \in [B,C]\ :\ g \circ f =: gf \in [A,C]\ .$$

(ii) *Es gelten folgende Axiome :*

(A1) $\forall\ A,B,C,D \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{C}),\ (A,B) \neq (C,D)\ :\ [A,B]\ \cap\ [C,D]\ =\ \emptyset$

(A2) $\forall\ A,B,C,D \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{C})\quad \forall\ f \in [A,B],\ g \in [B,C],\ h \in [C,D]\ :\ (hg)f = h(gf)$ *(Assoziativität)*

(A3) $\forall\ A \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{C})\quad \exists\, \mathbb{I}_A \in [A,A]\quad \forall\ B \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{C})\quad \forall\ f \in [A,B],\ g \in [B,A]\ :\ \mathbb{I}_A\, g = g\,,\quad f\,\mathbb{I}_A = f$

Beispiele : (1) $\mathfrak{C}_1$ ... Kategorie von Banachräumen :

$\mathrm{Ob}(\mathfrak{C}_1) := \{A :\ A$ komplexer Banach-Raum $\}$

$[A,B] := \mathcal{L}(A,B),\ A,\ B \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{C}_1) \implies \mathrm{Mor}(\mathfrak{C}_1) := \bigcup_{A,B\in\mathrm{Ob}(\mathfrak{C}_1)} \mathcal{L}(A,B)$

$\dashrightarrow$ $\mathbb{I}_A := \mathrm{id} : A \longrightarrow A$

(2) $\mathfrak{C}_2$ ... Kategorie von Interpolationspaaren (von Banachräumen) :

$\mathrm{Ob}(\mathfrak{C}_2) := \big\{\{A_0,A_1\}\ :$ (komplexe) Interpolationspaare (von Banach-Räumen) $\big\}$

$\big[\{A_0,A_1\},\{B_0,B_1\}\big] := \mathcal{L}\left(\{A_0,A_1\},\{B_0,B_1\}\right)$

$$\implies \mathrm{Mor}(\mathfrak{C}_2) := \bigcup_{\{A_0,A_1\},\{B_0,B_1\}\in\mathrm{Ob}(\mathfrak{C}_2)} \mathcal{L}\left(\{A_0,A_1\},\{B_0,B_1\}\right)$$

$\dashrightarrow$ $\mathbb{I}_A := \mathrm{id} : \{A_0,A_1\} \longrightarrow \{A_0,A_1\}$

Definition 6 *Seien* $\mathfrak{C}$ *und* $\mathfrak{D}$ *beliebige Kategorien.*

(i) *Ein* (kovarianter) Funktor F *ist eine Abbildung von* $\mathfrak{D}$ *in* $\mathfrak{C}$ *mit den Eigenschaften :*

- $\forall\ A \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{D})\ :\ F(A) \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{C})$
- $\forall\ A, B \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{D}) \quad \forall\ f \in [A, B] \subset \mathrm{Mor}(\mathfrak{D})\ :\ F(f) \in [F(A), F(B)] \subset \mathrm{Mor}(\mathfrak{C})$
- $\forall\ A \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{D})\ :\ F(\mathbb{I}_A) = \mathbb{I}_{F(A)}$
- $\forall\ A, B, C \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{D}) \quad \forall\ f \in [A, B],\ g \in [B, C]\ :\ F(gf) = F(g)F(f)$

(ii) *Seien* $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$ *die oben gegebenen Kategorien. Ein kovarianter Funktor* F *von* $\mathfrak{C}_2$ *in* $\mathfrak{C}_1$ *heißt* Interpolationsfunktor, *falls gilt :*

- $A_0 \cap A_1 \hookrightarrow F(\{A_0, A_1\}) \hookrightarrow A_0 + A_1$
- $\forall\ T \in \mathcal{L}\big(\{A_0, A_1\}, \{B_0, B_1\}\big)\ :\ F(T) = T\big|_{F(\{A_0,A_1\})}$

(iii) *Jeder Banach-Raum* A*, der sich für einen geeigneten Interpolationsfunktor* F *als* $A = F(\{A_0, A_1\})$ *darstellen läßt, heißt* Interpolationsraum (*bezüglich* $\{A_0, A_1\}$).

Bemerkung :

- 2. Eigenschaft in (ii) :

$$T \in \underbrace{\mathcal{L}\big(\{A_0, A_1\}, \{B_0, B_1\}\big)}_{[\{A_0,A_1\},\{B_0,B_1\}]_{\mathfrak{C}_2}} \underset{\text{(i)}}{\Longrightarrow} F(T) \in \underbrace{\mathcal{L}\big(F\big(\{A_0, A_1\}\big), F\big(\{B_0, B_1\}\big)\big)}_{[F(\{A_0,A_1\}),F(\{B_0,B_1\})]_{\mathfrak{C}_1}}$$

$\rightsquigarrow$ Interpolationseigenschaft

- Interpolationsfunktor F <u>exakt</u> $\iff$ $F\big(\{A_0, A_1\}\big)$, $F\big(\{B_0, B_1\}\big)$ exakte Interpolationsräume bezüglich $\{A_0, A_1\}$ und $\{B_0, B_1\}$

$\dashrightarrow$ gilt auch die „Umkehrung", d.h. existiert für beliebige Interpolationspaare $\{A_0, A_1\}$, $\{B_0, B_1\}$ und beliebige, bezüglich $\{A_0, A_1\}$ und $\{B_0, B_1\}$ intermediäre Räume A, B ein Interpolationsfunktor F mit $A = F\big(\{A_0, A_1\}\big)$, $B = F\big(\{B_0, B_1\}\big)$?

Satz 2 (Satz von Aronszajn/Gagliardo)
Seien $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$ *die oben gegebenen Kategorien und* A *ein Interpolationsraum bezüglich* $\{A_0, A_1\}$*. Dann gibt es einen exakten Interpolationsfunktor* F_0 *von* $\mathfrak{C}_2$ *nach* $\mathfrak{C}_1$*, so dass* $F_0\big(\{A_0, A_1\}\big) = A$ *gilt.*

Beweis : à la [BL76, Thm. 2.5.1]

<u>1. Schritt</u> : Seien $\{X_0, X_1\} \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{C}_2)$, $T \in \big[\{A_0, A_1\}, \{X_0, X_1\}\big] = \mathcal{L}\big(\{A_0, A_1\}, \{X_0, X_1\}\big)$; setzen

$$X = F_0\big(\{X_0, X_1\}\big) := \Big\{x \in X_0 + X_1 :\ \underbrace{x = \sum_{j=1}^{\infty} T_j a_j}_{\text{Konv. in } X_0 + X_1},\quad a_j \in A,\ T_j \in \mathcal{L}\big(\{A_0, A_1\}, \{X_0, X_1\}\big),\ j \in \mathbb{N},$$

$$\text{mit}\quad \|x\|_X := \inf_{x = \sum_{j=1}^{\infty} T_j a_j} \sum_{j=1}^{\infty} \big\|T_j | \mathcal{L}\big(\{A_0, A_1\}, \{X_0, X_1\}\big)\big\|\ \|a_j | A\| < \infty\Big\}$$

$\curvearrowright$ $\|\cdot\|_X$ Norm in X

<u>2. Schritt</u> : X ist Interpolationsraum bezüglich $\{X_0, X_1\}$, $\boxed{\text{z.z.}}$: $X_0 \cap X_1 \hookrightarrow X$:

Sei $\varphi : A_0 + A_1 \longrightarrow \mathbb{C}$ lineares stetiges Funktional, mit $\varphi(a^*) = 1$ für ein beliebiges festes $a^* \in A$, setzen

$$T_1 a := \varphi(a)x\ ,\quad a \in A_0 + A_1,\quad x \in X_0 \cap X_1 \quad \curvearrowright \quad T_1 : A_0 + A_1 \longrightarrow X_0 + X_1,$$

sei $a \in A_i$

$$\curvearrowright \ \|T_1 a|X_i\| = \|\varphi(a)x|X_i\| = \underbrace{|\varphi(a)|}_{\substack{\leq c\|a|A_0+A_1\|,\\ \varphi \in (A_0+A_1)'}} \|x|X_i\| \leq c\|a|A_0+A_1\| \, \|x|X_i\| \underset{\substack{a \in A_i \\ A_i \hookrightarrow A_0+A_1}}{\leq} c' \, \|a|A_i\| \, \|x|X_i\|$$

$$\implies \quad \|T_1|\mathcal{L}(A_i, X_i)\| \leq c' \, \|x|X_i\|$$

$$\underset{\text{Lemma 2}}{\implies} \quad \|T_1|\mathcal{L}(\{A_0, A_1\}, \{X_0, X_1\})\| \leq c' \underbrace{\max(\|x|X_0\|, \|x|X_1\|)}_{\|x|X_0 \cap X_1\|} = c' \, \|x|X_0 \cap X_1\|$$

$x = T_1 a^* \in X$,

$$\|x\|_X \underset{\inf}{\leq} \underbrace{\big\|T_1|\mathcal{L}\big(\{A_0, A_1\}, \{X_0, X_1\}\big)\big\|}_{\leq c'\|x|X_0 \cap X_1\|} \|a^*|A\| \leq c' \, \|a^*|A\| \, \|x|X_0 \cap X_1\| \implies X_0 \cap X_1 \hookrightarrow X$$

$\boxed{\text{z.z.}}$: $X \hookrightarrow X_0 + X_1$: sei $x \in X$,

$$\implies \quad x = \sum_{j=1}^{\infty} T_j a_j, \quad a_j \in A, \ T_j \in \mathcal{L}\big(\{A_0, A_1\}, \{X_0, X_1\}\big) \hookrightarrow \mathcal{L}(A_0 + A_1, X_0 + X_1), \quad j \in \mathbb{N}$$

$$\|x|X_0 + X_1\| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \underbrace{\|T_j a_j|X_0 + X_1\|}_{\leq \|T_j|\mathcal{L}(A_0+A_1, X_0+X_1)\| \|a_j|A_0+A_1\|} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \underbrace{\|T_j|\mathcal{L}(A_0 + A_1, X_0 + X_1)\|}_{\substack{\leq c\|T_j|\mathcal{L}(\{A_0, A_1\}, \{X_0, X_1\})\|, \\ \text{Lemma 2}}} \underbrace{\|a_j|A_0 + A_1\|}_{\substack{\leq c' \|a_j|A\|, \\ A \hookrightarrow A_0 + A_1}}$$

$$\leq c'' \sum_{j=1}^{\infty} \|T_j|\mathcal{L}(\{A_0, A_1\}, \{X_0, X_1\})\| \, \|a_j|A\|$$

$$\underset{\inf}{\implies} \|x|X_0 + X_1\| \leq c'' \, \|x\|_X \implies X \hookrightarrow X_0 + X_1$$

<u>3. Schritt</u> : X ist vollständig : verwenden Lemma $(*)$

Sei $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \|x^n\|_X < \infty \underset{X \hookrightarrow X_0 + X_1}{\implies} \sum_{n=1}^{\infty} \|x^n|X_0 + X_1\| < \infty$

$$\underset{\substack{\text{Lemma } (*) \\ X_0 + X_1 \text{ vollständig}}}{\implies} \exists \, x \in X_0 + X_1 : \left\| x - \sum_{n=1}^{m} x^n | X_0 + X_1 \right\| \xrightarrow[m \to \infty]{} 0$$

$x^n \in X$, $n \in \mathbb{N}$ $\implies$ $\forall \, n \in \mathbb{N} \ \ \exists \, T_j^{(n)} \in \mathcal{L}\big(\{A_0, A_1\}, \{X_0, X_1\}\big) \ \ \exists \, a_j^{(n)} \in A$:

$$x^n = \sum_{j=1}^{\infty} T_j^{(n)} a_j^{(n)}, \quad \sum_{j=1}^{\infty} \Big\|T_j^{(n)}|\mathcal{L}\big(\{A_0, A_1\}, \{X_0, X_1\}\big)\Big\| \, \Big\|a_j^{(n)}|A\Big\| < \|x^n\|_X + 2^{-n}$$

$$\implies \quad x = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\sum_{j=1}^{\infty} T_j^{(n)} a_j^{(n)}}_{x^n} \underset{\inf}{\implies} \|x\|_X < \sum_{n=1}^{\infty} \|x^n\|_X + 1,$$

$$\left\| x - \sum_{n=1}^{m} x^n \right\|_X \leq \sum_{n=m+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \Big\|T_j^{(n)}|\mathcal{L}\big(\{A_0, A_1\}, \{X_0, X_1\}\big)\Big\| \, \Big\|a_j^{(n)}|A\Big\|$$

$$\leq \sum_{n=m+1}^{\infty} \big(\|x^n\|_X + 2^{-n}\big) \xrightarrow[m \to \infty]{} 0 \qquad \underset{\text{Lemma } (*)}{\implies} \quad X \ \text{ vollständig}$$

<u>4. Schritt</u> : F_0 ist exakt : sei $S \in \mathcal{L}\big(\{X_0, X_1\}, \{Y_0, Y_1\}\big)$, d.h.

$$S : X_0 + X_1 \longrightarrow Y_0 + Y_1 \;, \quad M_i := \|S|\mathcal{L}(X_i, Y_i)\| < \infty, \quad i = 0, 1$$

$X := F_0\left(\{X_0, X_1\}\right)$, $Y := F_0\left(\{Y_0, Y_1\}\right)$; $\boxed{\text{z.z.}}$: $\|S|\mathcal{L}(X, Y)\| \leq \max\left(M_0, M_1\right)$

$$x \in X \curvearrowright \quad x = \sum_{j=1}^{\infty} T_j a_j, \quad a_j \in A, \quad T_j \in \mathcal{L}\big(\{A_0, A_1\}, \{X_0, X_1\}\big), \quad j \in \mathbb{N}$$

$$\curvearrowright \quad Sx = \sum_{j=1}^{\infty} ST_j a_j, \quad a_j \in A, \quad ST_j \in \mathcal{L}\big(\{A_0, A_1\}, \{Y_0, Y_1\}\big), \; j \in \mathbb{N},$$

mit $\big\|ST_j|\mathcal{L}\big(\{A_0, A_1\}, \{Y_0, Y_1\}\big)\big\| \leq \max\left(M_0, M_1\right) \big\|T_j|\mathcal{L}\big(\{A_0, A_1\}, \{X_0, X_1\}\big)\big\|$

$$\Longrightarrow \quad \|Sx\|_Y \underset{\inf}{\leq} \sum_{j=1}^{\infty} \underbrace{\big\|ST_j|\mathcal{L}\big(\{A_0, A_1\}, \{Y_0, Y_1\}\big)\big\|}_{\leq \max(M_0, M_1) \left\|T_j|\mathcal{L}\left(\{A_0, A_1\}, \{X_0, X_1\}\right)\right\|} \|a_j|A\|$$

$$\leq \max\left(M_0, M_1\right) \sum_{j=1}^{\infty} \big\|T_j|\mathcal{L}\big(\{A_0, A_1\}, \{X_0, X_1\}\big)\big\| \; \|a_j|A\|$$

$$\underset{\inf}{\Longrightarrow} \quad \|Sx\|_Y \leq \max\left(M_0, M_1\right) \|x\|_X \quad \curvearrowright \quad \|S|\mathcal{L}(X, Y)\| \leq \max\left(M_0, M_1\right)$$

<u>5. Schritt</u> : $F_0\big(\{A_0, A_1\}\big) = A$:

Sei $a \in F_0\big(\{A_0, A_1\}\big) \quad \Longrightarrow \quad \exists \{a_j\}_j \subset A, \; T_j \in \mathcal{L}\big(\{A_0, A_1\}\big), \; a = \sum_{j=1}^{\infty} T_j a_j$

A Interpolationsraum bezüglich $\{A_0, A_1\}$ $\underset{\text{Satz 1}}{\Longrightarrow}$ $\|T_j a_j|A\| \leq c \, \big\|T_j|\mathcal{L}\big(\{A_0, A_1\}\big)\big\| \; \|a_j|A\|$ gleichmäßig in $j \in \mathbb{N}$, $c = c(A)$

$$\Longrightarrow \quad \|a|A\| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \|T_j a_j|A\| \leq c \sum_{j=1}^{\infty} \big\|T_j|\mathcal{L}\big(\{A_0, A_1\}\big)\big\| \; \|a_j|A\|$$

$$\underset{\inf}{\Longrightarrow} \quad \|a|A\| \leq c \; \|a\|_A$$

$$\Longrightarrow \quad F_0\big(\{A_0, A_1\}\big) \hookrightarrow A$$

andererseits gilt für $a \in A$:

$$a = \text{id } a + 0 = \sum_{j=1}^{\infty} T_j a_j \quad \text{mit} \quad T_j = \left\{ \begin{array}{ccc} \text{id} & , & j = 1 \\ 0 & , & j \geq 2 \end{array} \right\} \in \mathcal{L}\big(\{A_0, A_1\}\big) \;, \quad a_j = \left\{ \begin{array}{ccc} a & , & j = 1 \\ 0 & , & j \geq 2 \end{array} \right\} \in A$$

$$\Longrightarrow \quad a \in F_0\big(\{A_0, A_1\}\big), \qquad \|a\|_A \underset{\inf}{\leq} \big\|T_1|\mathcal{L}\big(\{A_0, A_1\}\big)\big\| \; \|a|A\| \quad \Longrightarrow \quad A \hookrightarrow F_0\big(\{A_0, A_1\}\big)$$

$\square$

4 Die K-Methode

Sei $\{A_0, A_1\}$ Interpolationspaar. Das *Peetre'sche K-Funktional* ist definiert als

$$K(t, a; A_0, A_1) = K(t, a) := \inf_{\substack{a = a_0 + a_1 \\ a_i \in A_i,\, i = 0,1}} \left(\|a_0|A_0\| + t\,\|a_1|A_1\| \right) , \quad a \in A_0 + A_1, \quad t > 0$$

Bemerkung :

- wenn $\{A_0, A_1\}$ fixiert $\dashrightarrow$ $K(t, a)$ anstelle von $K(t, a; A_0, A_1)$
- $K(1, a) = \|a|A_0 + A_1\|$, für jedes feste $t > 0$: $K(t, a) \sim \|a|A_0 + A_1\|$

Lemma 1 *Sei $a \in A_0 + A_1$. Dann ist die Funktion $K(t, a)$ für $t > 0$ monoton wachsend, stetig und konkav. Es gilt*

$$\min(1, t)\ \|a|A_0 + A_1\| \le K(t, a) \le \max(1, t)\ \|a|A_0 + A_1\| , \quad 0 < t < \infty . \tag{1}$$

Beweis : *klar* : (1), Monotonie

$\boxed{\text{z.z.}}$: $K(t, a)$ konkav, d.h. $K\left((1 - \lambda)t_1 + \lambda t_2, a\right) \ge (1 - \lambda)K(t_1, a) + \lambda K(t_2, a)$, $0 < \lambda < 1$

Sei $0 < t_1 < t < t_2 < \infty$,

$$\underbrace{\frac{t_2 - t}{t_2 - t_1}\left(\|a_0|A_0\| + t_1\,\|a_1|A_1\|\right) + \frac{t - t_1}{t_2 - t_1}\left(\|a_0|A_0\| + t_2\,\|a_1|A_1\|\right)}_{\text{inf über } a = a_0 + a_1} = \|a_0|A_0\| + t\,\|a_1|A_1\|$$

$$\frac{t_2 - t}{t_2 - t_1} K(t_1, a) + \frac{t - t_1}{t_2 - t_1} K(t_2, a) \le \underbrace{\|a_0|A_0\| + t\,\|a_1|A_1\|}_{\text{inf über } a = a_0 + a_1}$$

$$\frac{t_2 - t}{t_2 - t_1} K(t_1, a) + \frac{t - t_1}{t_2 - t_1} K(t_2, a) \le K(t, a)$$

$\lambda := \dfrac{t - t_1}{t_2 - t_1} \in (0, 1) \implies K(t, a)$ konkav & $K(t, a)$ monoton wachsend $\underset{\text{siehe [20]}}{\Longrightarrow}$ stetig $\square$

Bemerkung : analog zu (1) gilt

$$\min\left(1, \frac{t}{s}\right) K(s, a) \le K(t, a) \le \max\left(1, \frac{t}{s}\right) K(s, a), \quad 0 < s, t < \infty$$

Gagliardo-Diagramm : *geometrische Interpretation von* $K(t, a)$

$$\Gamma(a) := \left\{ (x_0, x_1) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \exists\, a_i \in A_i \ : a = a_0 + a_1,\ \|a_i|A_i\| \le x_i,\ i = 0, 1 \right\} \subset \overline{\mathbb{R}}_+ \times \overline{\mathbb{R}}_+, \quad a \in A_0 + A_1$$

$\Gamma(a)$ konvex : seien (x_0, x_1), $(\overline{x_0}, \overline{x_1}) \in \Gamma(a)$

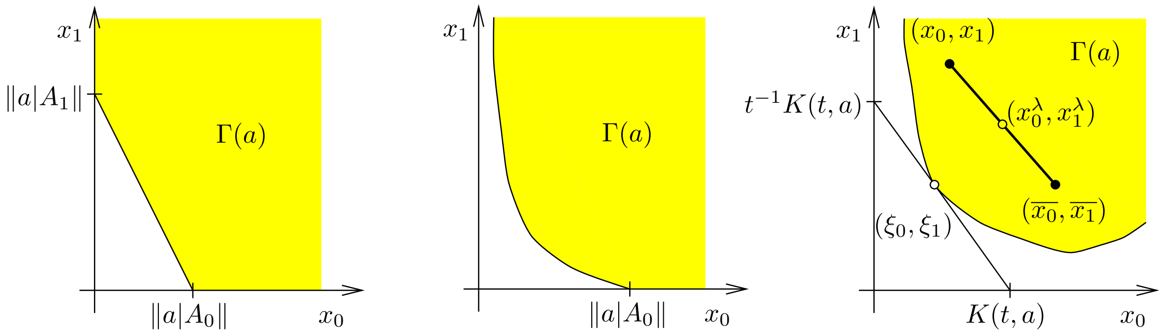
$$\curvearrowright\ \exists\, a_i, \overline{a_i} \in A_i :\ a = a_0 + a_1 = \overline{a_0} + \overline{a_1},\ \|a_i|A_i\| \le x_i,\ \|\overline{a_i}|A_i\| \le \overline{x_i},\ i = 0, 1$$

$a_i^\lambda := \lambda a_i + (1 - \lambda)\overline{a_i}$, $i = 0, 1$, $0 \le \lambda \le 1$ $\curvearrowright$ $a = a_0^\lambda + a_1^\lambda$, $\|a_i^\lambda|A_i\| \le \lambda \underbrace{\|a_i|A_i\|}_{x_i} + (1 - \lambda) \underbrace{\|\overline{a_i}|A_i\|}_{\overline{x_i}} \le x_i^\lambda$

$\curvearrowright$ $(x_0^\lambda, x_1^\lambda) = \lambda(x_0, x_1) + (1 - \lambda)(\overline{x_0}, \overline{x_1}) \in \Gamma(a)$, $0 \le \lambda \le 1$

---

[20] g mon. wachsend & konkav in $[a, b]$, $t_0 \in (a, b)$: (i) $a < t < t_0 \curvearrowright s_1 := a$, $s_2 := t_0$, $\lambda := \frac{t_0 - t}{t_0 - a} \iff t = \lambda s_1 + (1 - \lambda)s_2$
$\curvearrowright$ $|g(t) - g(t_0)| = g(t_0) - g(t) \le g(t_0) - \lambda g(a) - (1 - \lambda)g(t_0) = (t_0 - t)\frac{g(t_0) - g(a)}{t_0 - a} < \varepsilon$ für $|t - t_0| = t_0 - t < \delta$
(ii) $t_0 < t < b \curvearrowright s_1 := a$, $s_2 := t$, $\lambda := \frac{t - t_0}{t - a} \iff t_0 = \lambda s_1 + (1 - \lambda)s_2$
$\curvearrowright$ $|g(t) - g(t_0)| = g(t) - g(t_0) \le \frac{1}{1 - \lambda}(g(t_0) - g(a)) - g(t_0) = (t - t_0)\frac{g(t_0) - g(a)}{t_0 - a} < \varepsilon$ für $|t - t_0| = t - t_0 < \delta$



$\boxed{a \in A_0 \ \cap \ A_1}$ $\qquad$ $\boxed{a \in A_0 \ \setminus \ A_1}$ $\qquad$ $\boxed{a \in A_0 \ + \ A_1}$

$$K(t,a) = \inf_{(x_0,x_1)\in\Gamma(a)} (x_0 + t x_1) = \inf_{(x_0,x_1)\in\partial\Gamma(a)} (x_0 + t\, x_1) \approx \xi_0 + t\, \xi_1$$

Sei $\varphi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ stetig; man setzt für $0 < \theta < 1$, $1 \le q \le \infty$,

$$\Phi_{\theta,q}(\varphi) \ := \begin{cases} \left(\int\limits_0^\infty \left[t^{-\theta}\ \varphi(t)\right]^q \ \frac{\mathrm{d}t}{t} \right)^{\frac{1}{q}} & , \quad q < \infty \\ \sup\limits_{0<t<\infty} \ t^{-\theta}\ \varphi(t) & , \quad q = \infty \end{cases} \tag{2}$$

Bemerkung :

- erstmalig bei Peetre (1963)
- Verallgemeinerung : $t^{-\theta} \dashrightarrow \psi(t,\theta)$

Definition 1 *Seien* $\{A_0, A_1\}$ *ein Interpolationspaar,* $0 < \theta < 1$ *und* $1 \le q \le \infty$*. Dann ist*

$$(A_0, A_1)_{\theta,q} \ := \ \left\{ a \in A_0 + A_1 : \left\| a \right| (A_0,A_1)_{\theta,q} \right\| := \Phi_{\theta,q}\Big(K(\cdot,a)\Big) < \infty \right\} .$$

Bemerkung :

- $$\left\| a \right| (A_0,A_1)_{\theta,q} \right\| = \left\{ \begin{array}{ll} \left(\int\limits_0^\infty \left[t^{-\theta}\ K(t,a)\right]^q \ \frac{\mathrm{d}t}{t} \right)^{\frac{1}{q}} & , \quad q < \infty \\ \sup\limits_{0<t<\infty} \ t^{-\theta}\ K(t,a) & , \quad q = \infty \end{array} \right\}$$
- $q < \infty$, $\theta \le 0$ oder $\theta \ge 1 \implies (A_0,A_1)_{\theta,q} = \{0\}$:

$$\int\limits_0^\infty \left[t^{-\theta}\ K(t,a)\right]^q \ \frac{\mathrm{d}t}{t} \ \underset{(1)}{\ge} \ K(1,a)^q \underbrace{\int\limits_0^1 t^{(1-\theta)q}\ \frac{\mathrm{d}t}{t}}_{\text{divergent für } \theta \ge 1} + K(1,a)^q \underbrace{\int\limits_1^\infty t^{-\theta q}\ \frac{\mathrm{d}t}{t}}_{\text{divergent für } \theta \le 0}$$

$$\implies \quad \left\| a \right| (A_0,A_1)_{\theta,q} \right\| < \infty \quad \iff \quad K(1,a) = \|a|A_0 + A_1\| = 0 \quad \iff \quad a = 0$$

- $q = \infty$, $\theta < 0$ oder $\theta > 1 \implies (A_0,A_1)_{\theta,\infty} = \{0\}$:

$$\sup_{0<t<\infty} \ t^{-\theta}\ K(t,a) \ \underset{(1)}{\ge} \ K(1,a) \ \max\Big(\underbrace{\sup_{0<t<1} \ t^{1-\theta}}_{\text{divergent für } \theta > 1} \ , \ \underbrace{\sup_{1<t<\infty} \ t^{-\theta}}_{\text{divergent für } \theta < 0} \Big)$$

$$\implies \left\| a \right| (A_0,A_1)_{\theta,\infty} \right\| < \infty \quad \iff \quad K(1,a) = \|a|A_0 + A_1\| = 0 \quad \iff \quad a = 0$$

- prinzipiell möglich : $0 < q \le \infty \dashrightarrow (A_0,A_1)_{\theta,q}$ Quasi-Banach-Räume für $0 < q < 1$

Satz 1 *Seien* $\{A_0, A_1\}$ *ein Interpolationspaar,* $0 < \theta < 1$ *und* $1 \le q \le \infty$.

(i) *Dann ist* $(A_0, A_1)_{\theta,q}$ *ein Interpolationsraum bezüglich* $\{A_0, A_1\}$.

(ii) *Der Funktor* $K_{\theta,q} : \mathfrak{C}_2 \longrightarrow \mathfrak{C}_1$, $K_{\theta,q}(\{A_0, A_1\}) := (A_0, A_1)_{\theta,q}$ *ist exakt vom Typ* θ, *d.h. für alle* $T \in \mathcal{L}(\{A_0, A_1\}, \{B_0, B_1\})$ *gilt*

$$\left\| T \middle| \mathcal{L}\left((A_0, A_1)_{\theta,q}, (B_0, B_1)_{\theta,q}\right) \right\| \;\le\; \|T|\mathcal{L}(A_0, B_0)\|^{1-\theta} \; \|T|\mathcal{L}(A_1, B_1)\|^{\theta} \, . \tag{3}$$

(iii) *Es gilt für alle* $a \in (A_0, A_1)_{\theta,q}$

$$K(t, a) \;\le\; c_{\theta,q} \; t^{\theta} \; \left\| a \middle| (A_0, A_1)_{\theta,q} \right\| \, . \tag{4}$$

B e w e i s : <u>1. Schritt</u> : zeigen (4); sei $s > 0$

$$s^{-\theta q} = \underbrace{\theta q}_{=:c_{\theta,q}^{q}} \int_s^{\infty} t^{-\theta q} \, \frac{\mathrm{d}t}{t} \quad \Longrightarrow \quad s^{-\theta} K(s, a) \;=\; c_{\theta,q} \; K(s, a) \left(\int_s^{\infty} t^{-\theta q} \, \frac{\mathrm{d}t}{t} \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\underset{\substack{K(\cdot,a) \\ \text{mon. wachs.}}}{\le} c_{\theta,q} \left(\int_s^{\infty} t^{-\theta q} \; K(t, a)^q \, \frac{\mathrm{d}t}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \;\le\; c_{\theta,q} \; \left\| a \middle| (A_0, A_1)_{\theta,q} \right\|$$

<u>2. Schritt</u> : zu (i), $\boxed{\text{z.z.}}$ $(A_0, A_1)_{\theta,q}$ Banach-Raum; *dazu* : $\left\| a \middle| (A_0, A_1)_{\theta,q} \right\| = \Phi_{\theta,q}\Big(K(\cdot, a)\Big)$ Norm :

- $\Phi_{\theta,q}\Big(K(\cdot, a)\Big) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad K(t, a) \equiv 0 \underset{(1)}{\Longleftrightarrow} a \equiv 0$

- $K(\cdot, \lambda a) = |\lambda| \; K(\cdot, a) \quad \Longrightarrow \quad \Phi_{\theta,q}\Big(K(\cdot, \lambda a)\Big) = |\lambda| \; \Phi_{\theta,q}\Big(K(\cdot, a)\Big)$

- $K(t, a_1 + a_2) \;\le\; K(t, a_1) + K(t, a_2) \underset{\substack{\text{Minkowski} \\ q \ge 1}}{\Longrightarrow} \Phi_{\theta,q}\Big(K(\cdot, a_1 + a_2)\Big) \;\le\; \Phi_{\theta,q}\Big(K(\cdot, a_1)\Big) + \Phi_{\theta,q}\Big(K(\cdot, a_2)\Big)$

$(A_0, A_1)_{\theta,q}$ vollständig : Sei $\{a^n\}_n$ Cauchy-Folge in $(A_0, A_1)_{\theta,q} \underset{(4)}{\Longrightarrow} \{K(t, a^n)\}_n$ Cauchy-Folge für jedes feste t, $K(1, \cdot) = \|\cdot|A_0 + A_1\| \quad \Longrightarrow \quad \{a^n\}_n$ Cauchy-Folge in $A_0 + A_1 \underset{A_0 + A_1 \text{ vollst.}}{\Longrightarrow} \exists \, a \in A_0 + A_1$: $\lim\limits_{n \to \infty} a^n = a$ in $A_0 + A_1$

Sei zunächst $q < \infty$ ($q = \infty \dashrightarrow$ analog); $\{a^n\}_n$ Cauchy-Folge in $(A_0, A_1)_{\theta,q}$

$$\Longrightarrow \quad \forall \, \delta > 0 \quad \exists \, n_0(\delta) \quad \forall \, m > n \ge n_0(\delta) \;:\; \left\| a^m - a^n \middle| (A_0, A_1)_{\theta,q} \right\| < \frac{\delta}{2}$$

Seien $N > \varepsilon > 0$,

$$\left(\int_\varepsilon^N \left[t^{-\theta} K(t, a - a^n)\right]^q \frac{\mathrm{d}t}{t}\right)^{\frac{1}{q}} \leq \underbrace{\left(\int_\varepsilon^N \left[t^{-\theta} K(t, a^m - a^n)\right]^q \frac{\mathrm{d}t}{t}\right)^{\frac{1}{q}}}_{<\frac{\delta}{2}\ ,\ m>n\geq n_0(\delta)} + \left(\int_\varepsilon^N \left[t^{-\theta} K(t, a - a^m)\right]^q \frac{\mathrm{d}t}{t}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \frac{\delta}{2} + \left(\int_\varepsilon^N \left[t^{-\theta} \underbrace{K(t, a - a^m)}_{\underset{\text{Lemma 1}}{\leq} K(N, a - a^m) \underset{(1)}{\leq} N\|a - a^m|A_0 + A_1\|}\right]^q \frac{\mathrm{d}t}{t}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \frac{\delta}{2} + N\|a - a^m|A_0 + A_1\| \underbrace{\left(\int_\varepsilon^N t^{-\theta q} \frac{\mathrm{d}t}{t}\right)^{\frac{1}{q}}}_{\left[\frac{1}{\theta q}(\varepsilon^{-\theta q} - N^{-\theta q})\right]^{\frac{1}{q}}}$$

$$< \frac{\delta}{2} + \underbrace{N \left(\frac{1}{\theta q}\right)^{\frac{1}{q}} \varepsilon^{-\theta} \|a - a^m|A_0 + A_1\|}_{<\frac{\delta}{2}\ ,\ m\geq m_1(\delta,\varepsilon,N)} < \delta$$

$$\xrightarrow[\varepsilon\downarrow 0]{N\to\infty} \left\|a - a^n|\,(A_0, A_1)_{\theta,q}\right\| < \delta \quad \text{für } n \geq n_0(\delta) \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a^n = a \quad \text{in } (A_0, A_1)_{\theta,q}$$

<u>3. Schritt</u> : zu (i), $\boxed{\text{z.z.}}$ $(A_0, A_1)_{\theta,q}$ ist intermediärer Raum, d.h. $A_0 \cap A_1 \hookrightarrow (A_0, A_1)_{\theta,q} \hookrightarrow A_0 + A_1$

Sei $a \in A_0 \cap A_1 \quad \Longrightarrow \quad K(t, a) \leq \min(1, t)\ \|a|A_0 \cap A_1\|$, o.B.d.A. $q < \infty$

$$\Longrightarrow \left\|a|\,(A_0, A_1)_{\theta,q}\right\| \leq \underbrace{\left(\int_0^1 \left[t^{-\theta}\ K(t, a)\right]^q \frac{\mathrm{d}t}{t}\right)^{\frac{1}{q}}}_{\leq \|a|A_0\cap A_1\| \left(\int_0^1 t^{(1-\theta)q} \frac{\mathrm{d}t}{t}\right)^{\frac{1}{q}}} + \underbrace{\left(\int_1^\infty \left[t^{-\theta}\ K(t, a)\right]^q \frac{\mathrm{d}t}{t}\right)^{\frac{1}{q}}}_{\leq \|a|A_0\cap A_1\| \left(\int_1^\infty t^{-\theta q} \frac{\mathrm{d}t}{t}\right)^{\frac{1}{q}}}$$

$$\leq \|a|A_0 \cap A_1\| \left[\left(\frac{1}{(1-\theta)q}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{1}{\theta q}\right)^{\frac{1}{q}}\right] \quad \Longrightarrow \quad A_0 \cap A_1 \hookrightarrow (A_0, A_1)_{\theta,q}$$

$$\|a|A_0 + A_1\| = K(1, a) \underset{(4)}{\leq} c_{\theta,q} \left\|a|\,(A_0, A_1)_{\theta,q}\right\| \quad \Longrightarrow \quad (A_0, A_1)_{\theta,q} \hookrightarrow A_0 + A_1$$

<u>4. Schritt</u> : zu (ii), $\boxed{\text{z.z.}}$ $K_{\theta,q}$ Interpolationsfunktor, (3)

Sei $T \in \mathcal{L}\left(\{A_0, A_1\}, \{B_0, B_1\}\right)$, $T \neq 0$, $a \in A_0 + A_1$

$$K(t, Ta; B_0, B_1) = \inf_{\substack{Ta = b_0 + b_1 \\ b_i \in B_i, i = 0,1}} \left(\|b_0|B_0\| + t\ \|b_1|B_1\|\right)$$

$$\underset{b_i = Ta_i}{\leq} \inf_{\substack{a = a_0 + a_1 \\ a_i \in A_i, i = 0,1}} \left(\|Ta_0|B_0\| + t\ \|Ta_1|B_1\|\right)$$

$$\leq \inf_{\substack{a = a_0 + a_1 \\ a_i \in A_i, i = 0,1}} \left(\|T|\mathcal{L}(A_0, B_0)\|\|a_0|A_0\| + t\ \|T|\mathcal{L}(A_1, B_1)\|\|a_1|A_1\|\right)$$

$$= \|T|\mathcal{L}(A_0, B_0)\| \underbrace{\inf_{\substack{a = a_0 + a_1 \\ a_i \in A_i, i = 0,1}} \left(\|a_0|A_0\| + \overbrace{t\ \frac{\|T|\mathcal{L}(A_1, B_1)\|}{\|T|\mathcal{L}(A_0, B_0)\|}}^{\tau} \|a_1|A_1\|\right)}_{K(\tau, a; A_0, A_1)}$$

$$\Longrightarrow \quad \left\| Ta \,|\, (B_0,B_1)_{\theta,q} \right\| \;=\; \left(\int_0^\infty \left[t^{-\theta}\, K(t,Ta;B_0,B_1) \right]^q \frac{\mathrm{d}t}{t} \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\le \; \|T|\mathcal{L}(A_0,B_0)\| \left(\int_0^\infty \left[t^{-\theta}\, K(\tau,a;A_0,A_1) \right]^q \frac{\mathrm{d}t}{t} \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\underset{\tau = t\,\frac{\|T|\mathcal{L}(A_1,B_1)\|}{\|T|\mathcal{L}(A_0,B_0)\|}}{\le} \; \|T|\mathcal{L}(A_0,B_0)\| \left(\frac{\|T|\mathcal{L}(A_0,B_0)\|}{\|T|\mathcal{L}(A_1,B_1)\|} \right)^{-\theta} \underbrace{\left(\int_0^\infty \left[\tau^{-\theta}\, K(\tau,a;A_0,A_1) \right]^q \frac{\mathrm{d}\tau}{\tau} \right)^{\frac{1}{q}}}_{\left\| a|(A_0,A_1)_{\theta,q} \right\|}$$

$$= \; \|T|\mathcal{L}(A_0,B_0)\|^{1-\theta}\; \|T|\mathcal{L}(A_1,B_1)\|^{\theta} \left\| a \,|\, (A_0,A_1)_{\theta,q} \right\|$$

$$\curvearrowright \quad \left\| T|\mathcal{L}\left((A_0,A_1)_{\theta,q}\,,(B_0,B_1)_{\theta,q} \right) \right\| \;\le\; \|T|\mathcal{L}(A_0,B_0)\|^{1-\theta}\; \|T|\mathcal{L}(A_1,B_1)\|^{\theta} \qquad \square$$

Satz 2 *Seien* $\{A_0,A_1\}$ *ein Interpolationspaar,* $0<\theta<1$ *und* $1\le q\le\infty$*. Für* $(A_0,A_1)_{\theta,q}$ *gelten die folgenden Eigenschaften :*

(i) $(A_0,A_1)_{\theta,q} \;=\; (A_1,A_0)_{1-\theta,q}$

(ii) *Seien* $0<\theta<1,\;\; 1\le q\le r\le\infty$, *dann ist*

$$(A_0,A_1)_{\theta,1} \;\hookrightarrow\; (A_0,A_1)_{\theta,q} \;\hookrightarrow\; (A_0,A_1)_{\theta,r} \;\hookrightarrow\; (A_0,A_1)_{\theta,\infty}\;.$$

(iii) *Für* $A_0\hookrightarrow A_1$ *gilt für alle* $0<\theta<\eta<1$ *und* $1\le q,r\le\infty$,

$$(A_0,A_1)_{\theta,q} \;\hookrightarrow\; (A_0,A_1)_{\eta,r}\;.$$

(iv) *Falls* $A_0=A_1$ *ist, so gilt*

$$(A_0,A_1)_{\theta,q} \;=\; A_0 \;=\; A_1$$

(im Sinne äquivalenter Normen).

(v) *Es existiert ein* $C_{\theta,q}>0$, *so dass für alle* $a\in A_0\cap A_1$ *gilt*

$$\left\| a \,|\, (A_0,A_1)_{\theta,q} \right\| \;\le\; C_{\theta,q}\; \|a|A_0\|^{1-\theta}\; \|a|A_1\|^{\theta}\;.$$

B e w e i s : $\boxed{\text{zu (i)}}$: $K(t,a;A_0,A_1) = t\,K\left(t^{-1},a;A_1,A_0\right) \quad \curvearrowright$

$$\left\| a \,|\, (A_0,A_1)_{\theta,q} \right\| \;=\; \left(\int_0^\infty \left[t^{-\theta}\, K(t,a;A_0,A_1) \right]^q \frac{\mathrm{d}t}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \;=\; \left(\int_0^\infty \left[t^{1-\theta}\, K\left(t^{-1},a;A_1,A_0\right) \right]^q \frac{\mathrm{d}t}{t} \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\underset{s=t^{-1}}{=} \left(\int_0^\infty \left[s^{-(1-\theta)}\, K(s,a;A_1,A_0) \right]^q \frac{\mathrm{d}s}{s} \right)^{\frac{1}{q}} = \; \left\| a \,|\, (A_1,A_0)_{1-\theta,q} \right\|$$

$\boxed{\text{zu (ii)}}$: Sei $r<\infty \quad \underset{\text{Satz 1 (iii)}}{\Longrightarrow} \quad \left\| a \,|\, (A_0,A_1)_{\theta,\infty} \right\| \;=\; \sup\limits_{0<t<\infty} t^{-\theta}\, K(t,a) \;\le\; C_{\theta,r} \left\| a \,|\, (A_0,A_1)_{\theta,r} \right\|$

$\Longleftrightarrow \quad (A_0,A_1)_{\theta,r} \;\hookrightarrow\; (A_0,A_1)_{\theta,\infty}$

Sei nun $1 \le q < r < \infty$,

$$\left\| a \,|\, (A_0, A_1)_{\theta,r} \right\| = \left(\int_0^\infty \left[t^{-\theta} K(t,a) \right]^r \frac{\mathrm{d}t}{t} \right)^{\frac{1}{r}}$$

$$= \left(\int_0^\infty \left[t^{-\theta} K(t,a) \right]^q \Big[\underbrace{t^{-\theta} K(t,a)}_{\le \sup\limits_{0<t<\infty} t^{-\theta} K(t,a) \le C_{\theta,q} \left\| a | (A_0,A_1)_{\theta,q} \right\|} \Big]^{r-q} \frac{\mathrm{d}t}{t} \right)^{\frac{1}{r}}$$

$$\le C_{\theta,q}^{1-\frac{q}{r}} \left\| a \,|\, (A_0, A_1)_{\theta,q} \right\|^{1-\frac{q}{r}} \underbrace{\left(\int_0^\infty \left[t^{-\theta} K(t,a) \right]^q \frac{\mathrm{d}t}{t} \right)^{\frac{1}{r}}}_{\left\| a | (A_0,A_1)_{\theta,q} \right\|^{\frac{q}{r}}} = C_{\theta,q}^{1-\frac{q}{r}} \left\| a \,|\, (A_0, A_1)_{\theta,q} \right\|$$

$$\Longrightarrow \quad (A_0, A_1)_{\theta,q} \hookrightarrow (A_0, A_1)_{\theta,r}$$

$\boxed{\text{zu (iii)}}$: $A_0 \hookrightarrow A_1 \quad \Longrightarrow \quad A_1 = A_0 + A_1 \underset{\inf}{\Longrightarrow} \forall\, a \in A_0 + A_1 = A_1 \ : K(t,a) \le t \, \|a|A_1\|$

wegen (ii) $\boxed{\text{g.z.z.}}$: $(A_0, A_1)_{\theta,\infty} \hookrightarrow (A_0, A_1)_{\eta,1}$, $0 < \theta < \eta < 1$

$$a \in (A_0, A_1)_{\theta,\infty} \quad \Longrightarrow \quad \left\| a \,|\, (A_0, A_1)_{\eta,1} \right\| = \int_0^1 t^{-\eta} \underbrace{K(t,a)}_{\le t \, \|a|A_1\|} \frac{\mathrm{d}t}{t} + \int_1^\infty t^{-\eta+\theta} \underbrace{t^{-\theta} K(t,a)}_{\le \sup\limits_{0<t<\infty} t^{-\theta} K(t,a)} \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

$$\le \|a|A_1\| \underbrace{\int_0^1 t^{1-\eta} \frac{\mathrm{d}t}{t}}_{(1-\eta)^{-1}} + \underbrace{\sup_{0<t<\infty} t^{-\theta} K(t,a)}_{\left\| a | (A_0,A_1)_{\theta,\infty} \right\|} \underbrace{\int_1^\infty t^{-\eta+\theta} \frac{\mathrm{d}t}{t}}_{(\eta-\theta)^{-1}}$$

$$\le c_\eta \, \|a|A_1\| + c'_{\eta,\theta} \left\| a \,|\, (A_0, A_1)_{\theta,\infty} \right\|$$

$$\underset{\text{Satz 1 (i)}}{\Longrightarrow} \quad (A_0, A_1)_{\theta,\infty} \hookrightarrow \overbrace{A_0 + A_1}^{=A_1} \quad \Longrightarrow \quad \left\| a \,|\, (A_0, A_1)_{\eta,1} \right\| \le c''_{\eta,\theta} \left\| a \,|\, (A_0, A_1)_{\theta,\infty} \right\|$$

$$\Longleftrightarrow \quad (A_0, A_1)_{\theta,\infty} \hookrightarrow (A_0, A_1)_{\eta,1}$$

$\boxed{\text{zu (iv)}}$: $A_0 = A_1 \underset{\text{Satz 1 (i)}}{\Longrightarrow} A_0 = A_0 \cap A_1 \hookrightarrow (A_0, A_1)_{\theta,q} \hookrightarrow A_0 + A_1 = A_0$

$\boxed{\text{zu (v)}}$: Sei $a \in A_0 \cap A_1$, definieren $T_a : \mathbb{C} \longrightarrow A_0 + A_1$, $T_a(\lambda) := \lambda a$

$$\Longrightarrow \quad \|T_a|\mathcal{L}(\mathbb{C}, A_i)\| = \|a|A_i\| \ , \quad i = 0,1$$

$$\underset{\text{Satz 1 (ii)}}{\Longrightarrow} \left\| T_a | \mathcal{L}\Big(\underbrace{(\mathbb{C},\mathbb{C})_{\theta,q}}_{=\mathbb{C},\ \text{(iv)}}, (A_0, A_1)_{\theta,q} \Big) \right\| \le \underbrace{\|T_a|\mathcal{L}(\mathbb{C}, A_0)\|}_{\|a|A_0\|}^{1-\theta} \underbrace{\|T_a|\mathcal{L}(\mathbb{C}, A_1)\|}_{\|a|A_1\|}^{\theta} = \|a|A_0\|^{1-\theta} \, \|a|A_1\|^{\theta}$$

$$\Longrightarrow \quad \left\| a \,|\, (A_0, A_1)_{\theta,q} \right\| \le C_{\theta,q} \left\| T_a | \mathcal{L}\left(\mathbb{C}, (A_0, A_1)_{\theta,q} \right) \right\| \le C_{\theta,q} \, \|a|A_0\|^{1-\theta} \, \|a|A_1\|^{\theta}$$

$\square$

Bemerkung :

- (iv) : $A_0 = A_1 =: A, \quad a \in A, \ t > 0$

$$\Longrightarrow \quad K(t,a) = \inf_{\substack{a = a_0 + a_1 \\ a_i \in A, i=0,1}} \left(\|a_0|A\| + t\,\|a_1|A\| \right) = \min(1,t)\ \|a|A\|$$

$$\left\| a | (A_0,A_1)_{\theta,q} \right\|^q = \int_0^\infty \left[t^{-\theta}\ K(t,a) \right]^q \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

$$= \|a|A\|^q \underbrace{\int_0^1 t^{(1-\theta)q} \frac{\mathrm{d}t}{t}}_{\frac{1}{(1-\theta)q}} + \|a|A\|^q \underbrace{\int_1^\infty t^{-\theta q} \frac{\mathrm{d}t}{t}}_{\frac{1}{\theta q}} = \frac{\|a|A\|^q}{q} \underbrace{\left(\frac{1}{1-\theta} + \frac{1}{\theta} \right)}_{\frac{1}{\theta(1-\theta)}}$$

$$\Longrightarrow \quad \left\| a | (A_0,A_1)_{\theta,q} \right\| = \|a|A\| \underbrace{\frac{1}{\left[\theta(1-\theta)q \right]^{1/q}}}_{= \Phi_{\theta,q}\left(\min(1,t)\right) =: c(\theta,q)} = c(\theta,q)\ \|a|A\|$$

- Sätze 1, 2 gelten auch für reelle Banach-Räume und im Quasi-Banach-Fall $0 < q < 1$

Lemma 2 *Seien* $\{A_0, A_1\}$, $\{B_0, B_1\}$ *Interpolationspaare von Banach-Räumen mit* $A_i \hookrightarrow B_i$, $i = 0,1$, *und* $0 < \theta < 1$, $1 \le q \le \infty$. *Dann gilt*

$$(A_0,A_1)_{\theta,q} \hookrightarrow (B_0,B_1)_{\theta,q} \ .$$

Beweis : $a \in A_0 + A_1$, $a = a_0 + a_1$, $a_i \in A_i \hookrightarrow B_i$, $i = 0,1 \quad \Longrightarrow \quad \|a_i|B_i\| \le c\ \|a_i|A_i\|$, $i = 0,1$, $c = \max\left(\|\,\mathrm{id}|\mathcal{L}(A_0,B_0)\|\,, \|\,\mathrm{id}|\mathcal{L}(A_1,B_1)\| \right)$

$$\underset{\inf}{\Longrightarrow} \quad K(t,a;B_0,B_1) \le c\ K(t,a;A_0,A_1) \quad \Longrightarrow \quad (A_0,A_1)_{\theta,q} \hookrightarrow (B_0,B_1)_{\theta,q}$$ □

5 Anwendung auf Folgenräume vom ℓ_p -Typ

Definition 1 *Seien* A *ein Banach-Raum,* $\sigma \in \mathbb{R}$, $1 \le p \le \infty$. *Dann ist* $\ell_p^\sigma(A)$ *der Raum aller Folgen* $\xi = \{\xi_j\}_{j=0}^\infty$, $\xi_j \in A$, $j \in \mathbb{N}_0$, *für die gilt*

$$\left\| \xi | \ell_p^\sigma(A) \right\| := \begin{cases} \left(\sum\limits_{j=0}^\infty 2^{j\sigma p}\ \|\xi_j|A\|^p \right)^{\frac{1}{p}} & , \quad p < \infty \\ \sup\limits_{j \in \mathbb{N}_0} 2^{j\sigma}\ \|\xi_j|A\| & , \quad p = \infty \end{cases} < \infty \ .$$

Bemerkung :

- $\ell_p^\sigma(A)$, $1 \le p \le \infty$, ist mit $\|\cdot|\ell_p^\sigma(A)\|$ Banach-Raum
- $\sigma = 0, \ A = \mathbb{C} \quad \Longrightarrow \quad \ell_p^\sigma(A) = \ell_p$
- Monotonie : $\ell_r^\sigma(A) \hookrightarrow \ell_p^\sigma(A)$ für $\sigma \in \mathbb{R}$, $1 \le r \le p \le \infty$
- Vorbereitung für Funktionenräume, z.B. $B^s_{p,q}$

Satz 1 *Seien* A *ein Banach-Raum,* $s_0, s_1 \in \mathbb{R}$, $s_0 \ne s_1$, $1 \le p_0, p_1, p \le \infty$, $0 < \theta < 1$. *Dann gilt für* $s := (1-\theta)s_0 + \theta s_1$

$$\left(\ell_{p_0}^{s_0}(A), \ell_{p_1}^{s_1}(A) \right)_{\theta,p} = \ell_p^s(A) \ .$$

Beweis : *Idee* : zeigen $\left(\ell_\infty^{s_0}(A), \ell_\infty^{s_1}(A)\right)_{\theta,p} \hookrightarrow \ell_p^s(A)$, $\ell_p^s \hookrightarrow \left(\ell_1^{s_0}(A), \ell_1^{s_1}(A)\right)_{\theta,p}$ & Lemma 4.2

<u>1. Schritt</u> : zeigen $\left(\ell_\infty^{s_0}(A), \ell_\infty^{s_1}(A)\right)_{\theta,p} \hookrightarrow \ell_p^s(A)$

Sei $\xi = \{\xi_j\}_j \in \ell_\infty^{\min(s_0,s_1)}(A) = \ell_\infty^{s_0}(A) + \ell_\infty^{s_1}(A)$, $\boxed{\text{z.z.}}$: $K\left(t,\xi;\ell_\infty^{s_0}(A),\ell_\infty^{s_1}(A)\right) \sim \sup\limits_{j\in\mathbb{N}_0} \min\left(2^{js_0}, t2^{js_1}\right)\|\xi_j|A\|$

$$K\left(t,\xi;\ell_\infty^{s_0}(A),\ell_\infty^{s_1}(A)\right) = \inf_{\substack{\xi = \xi^0+\xi^1 \\ \xi^i \in \ell_\infty^{s_i}(A),\, i=0,1}} \Big(\overbrace{\sup_{j\in\mathbb{N}_0} 2^{js_0}\left\|\xi_j^0|A\right\|}^{\|\xi^0|\ell_\infty^{s_0}(A)\|} + t\,\overbrace{\sup_{j\in\mathbb{N}_0} 2^{js_1}\left\|\xi_j^1|A\right\|}^{\|\xi^1|\ell_\infty^{s_1}(A)\|} \Big)$$

setzen $\widehat{\xi}_j^0 := \left\{\begin{matrix} \xi_j & , & 2^{js_0} \le t2^{js_1} \\ 0 & , & 2^{js_0} > t2^{js_1}\end{matrix}\right\}$, $\widehat{\xi}_1 := \xi - \widehat{\xi}^0 \quad \Longrightarrow \quad \widehat{\xi}_j^1 := \left\{\begin{matrix} 0 & , & 2^{js_0} \le t2^{js_1} \\ \xi_j & , & 2^{js_0} > t2^{js_1}\end{matrix}\right\}$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad \sup_{j\in\mathbb{N}_0} 2^{js_0}\left\|\widehat{\xi}_j^0|A\right\| &= \sup_{2^{js_0}\le t2^{js_1}} 2^{js_0}\|\xi_j|A\| &\le \sup_{j\in\mathbb{N}_0} \min\left(2^{js_0}, t2^{js_1}\right)\|\xi_j|A\| \\
t\sup_{j\in\mathbb{N}_0} 2^{js_1}\left\|\widehat{\xi}_j^1|A\right\| &= \sup_{2^{js_0}> t2^{js_1}} t\,2^{js_1}\|\xi_j|A\| &\le \sup_{j\in\mathbb{N}_0} \min\left(2^{js_0}, t2^{js_1}\right)\|\xi_j|A\|
\end{aligned}$$

$$\underset{\inf,\ \xi=\widehat{\xi}^0+\widehat{\xi}^1}{\Longrightarrow} \quad K\left(t,\xi;\ell_\infty^{s_0}(A),\ell_\infty^{s_1}(A)\right) \le 2\sup_{j\in\mathbb{N}_0}\min\left(2^{js_0}, t2^{js_1}\right)\|\xi_j|A\|$$

Sei $\xi = \xi^0 + \xi^1 \quad \Longrightarrow \quad \|\xi_j|A\| \le \|\xi_j^0|A\| + \left\|\xi_j^1|A\right\|$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad \sup_{j\in\mathbb{N}_0}\min\left(2^{js_0}, t2^{js_1}\right)\|\xi_j|A\| &\le \sup_{j\in\mathbb{N}_0}\min\left(2^{js_0}, t2^{js_1}\right)\left(\|\xi_j^0|A\| + \left\|\xi_j^1|A\right\|\right) \\
&\le \sup_{j\in\mathbb{N}_0}\left(2^{js_0}\|\xi_j^0|A\| + t\,2^{js_1}\left\|\xi_j^1|A\right\|\right) \\
&\le \left\|\xi^0|\ell_\infty^{s_0}(A)\right\| + t\left\|\xi^1|\ell_\infty^{s_1}(A)\right\|
\end{aligned}$$

$$\underset{\inf}{\Longrightarrow} \quad \sup_{j\in\mathbb{N}_0}\min\left(2^{js_0}, t2^{js_1}\right)\|\xi_j|A\| \le K\left(t,\xi;\ell_\infty^{s_0}(A),\ell_\infty^{s_1}(A)\right)$$

o.B.d.A. $s_0 > s_1$, sonst Satz 4.2 (i); zerlegen $\quad (0,\infty) = \bigcup\limits_{k=-\infty}^{\infty}\left[2^{(k-1)(s_0-s_1)}, 2^{k(s_0-s_1)}\right)$; seien $p < \infty$, $\xi \in \left(\ell_\infty^{s_0}(A), \ell_\infty^{s_1}(A)\right)_{\theta,p}$

$$\begin{aligned}
\left\|\xi|\left(\ell_\infty^{s_0}(A),\ell_\infty^{s_1}(A)\right)_{\theta,p}\right\|^p &= \int_0^\infty t^{-\theta p}\,K\left(t,\xi;\ell_\infty^{s_0}(A),\ell_\infty^{s_1}(A)\right)^p\,\frac{\mathrm{d}t}{t} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{2^{(k-1)(s_0-s_1)}}^{2^{k(s_0-s_1)}} \overbrace{t^{-\theta p}}^{\ge c_1\,2^{-\theta pk(s_0-s_1)}}\,\underbrace{K\left(t,\xi;\ell_\infty^{s_0}(A),\ell_\infty^{s_1}(A)\right)^p}_{\ge \sup\limits_{j\in\mathbb{N}_0}\min(2^{js_0},t2^{js_1})\|\xi_j|A\|}\,\frac{\mathrm{d}t}{t} \\
&\ge c_1\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{-\theta pk(s_0-s_1)}\,\underbrace{\sup_{j\in\mathbb{N}_0}\min\left(2^{js_0p}, 2^{kp(s_0-s_1)}\,2^{js_1p}\right)\|\xi_j|A\|^p}_{\ge \min\left(2^{ks_0p},2^{kp(s_0-s_1)+ks_1p}\right)\|\xi_k|A\|^p}\,\underbrace{\int_{2^{(k-1)(s_0-s_1)}}^{2^{k(s_0-s_1)}}\frac{\mathrm{d}t}{t}}_{=c_2} \\
&\ge c_3\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{-\theta pk(s_0-s_1)}\,2^{ks_0p}\,\underbrace{\|\xi_k|A\|^p}_{=0,k<0} \\
&= c_3\sum_{k=0}^{\infty} 2^{kp[s_0(1-\theta)+\theta s_1]}\,\|\xi_k|A\|^p \quad = \quad c_3\left\|\xi|\ell_p^s(A)\right\|^p
\end{aligned}$$

$$p=\infty\ :\quad \left\| \xi \middle| \left(\ell_\infty^{s_0}(A), \ell_\infty^{s_1}(A)\right)_{\theta,\infty} \right\| \;=\; \sup_{t>0}\, t^{-\theta}\, K\left(t,\xi;\ell_\infty^{s_0}(A),\ell_\infty^{s_1}(A)\right)$$

$$= \sup_{k\in\mathbb{Z}}\ \sup_{2^{(k-1)(s_0-s_1)}<t<2^{k(s_0-s_1)}} \overbrace{t^{-\theta}}^{\geq\, c_1\, 2^{-\theta k(s_0-s_1)}}\ \underbrace{K\left(t,\xi;\ell_\infty^{s_0}(A),\ell_\infty^{s_1}(A)\right)}_{\geq\, \sup_{j\in\mathbb{N}_0} \min(2^{js_0},t2^{js_1})\|\xi_j|A\|}$$

$$\geq c_1 \sup_{k\in\mathbb{Z}} 2^{-\theta k(s_0-s_1)}\ \underbrace{\sup_{j\in\mathbb{N}_0} \min\left(2^{js_0}, 2^{k(s_0-s_1)}\, 2^{js_1}\right)\|\xi_j|A\|}_{\geq\, \min\left(2^{ks_0},2^{k(s_0-s_1)+ks_1}\right)\|\xi_k|A\|}$$

$$\geq c_3 \sup_{k\in\mathbb{Z}} 2^{-\theta k(s_0-s_1)}\ 2^{ks_0}\, \underbrace{\|\xi_k|A\|}_{=0,k<0} \;=\; c_3\ \|\xi|\ell_\infty^s(A)\|$$

$$\Longrightarrow\quad \left(\ell_\infty^{s_0}(A),\ell_\infty^{s_1}(A)\right)_{\theta,p} \hookrightarrow \ell_p^s(A)$$

<u>2. Schritt</u> : zeigen $\ell_p^s \hookrightarrow \left(\ell_1^{s_0}(A),\ell_1^{s_1}(A)\right)_{\theta,p}$

o.B.d.A. $s_0 > s_1$, sonst Satz 4.2 (i); $\boxed{\text{z.z.}}$: $K\left(t,\xi;\ell_1^{s_0}(A),\ell_1^{s_1}(A)\right) \sim \sum_{j=0}^{\infty} \min\left(2^{js_0},t2^{js_1}\right)\|\xi_j|A\|$

$$K\left(t,\xi;\ell_1^{s_0}(A),\ell_1^{s_1}(A)\right) = \inf_{\substack{\xi=\xi^0+\xi^1\\ \xi^i\in\ell_1^{s_i}(A),\,i=0,1}} \Bigg(\overbrace{\sum_{j=0}^{\infty} 2^{js_0}\left\|\xi_j^0|A\right\|}^{\|\xi^0|\ell_1^{s_0}(A)\|} + t\ \overbrace{\sum_{j=0}^{\infty} 2^{js_1}\left\|\xi_j^1|A\right\|}^{\|\xi^1|\ell_1^{s_1}(A)\|} \Bigg)$$

analog zum 1. Schritt : $\xi=\widehat{\xi}^0+\widehat{\xi}_1$,

$$\Longrightarrow\quad \sum_{j=0}^{\infty} 2^{js_0}\left\|\widehat{\xi}_j^0|A\right\| = \sum_{2^{js_0}\leq\, t2^{js_1}} 2^{js_0}\,\|\xi_j|A\| \;\leq\; \sum_{j=0}^{\infty}\min\left(2^{js_0},t2^{js_1}\right)\|\xi_j|A\|$$

$$t\sum_{j=0}^{\infty} 2^{js_1}\left\|\widehat{\xi}_j^1|A\right\| = \sum_{2^{js_0}>\, t2^{js_1}} t\ 2^{js_1}\,\|\xi_j|A\| \;\leq\; \sum_{j=0}^{\infty}\min\left(2^{js_0},t2^{js_1}\right)\|\xi_j|A\|$$

$$\underset{\inf,\ \xi=\widehat{\xi}^0+\widehat{\xi}^1}{\Longrightarrow}\quad K\left(t,\xi;\ell_1^{s_0}(A),\ell_1^{s_1}(A)\right) \leq 2\sum_{j=0}^{\infty}\min\left(2^{js_0},t2^{js_1}\right)\|\xi_j|A\|$$

Sei $\xi=\xi^0+\xi^1 \quad\Longrightarrow\quad \|\xi_j|A\| \leq \|\xi_j^0|A\|+\left\|\xi_j^1|A\right\|$

$$\Longrightarrow\quad \sum_{j=0}^{\infty}\min\left(2^{js_0},t2^{js_1}\right)\|\xi_j|A\| \;\leq\; \sum_{j=0}^{\infty}\min\left(2^{js_0},t2^{js_1}\right)\left(\|\xi_j^0|A\|+\left\|\xi_j^1|A\right\|\right)$$

$$\leq \sum_{j=0}^{\infty}\left(2^{js_0}\|\xi_j^0|A\| + t\ 2^{js_1}\left\|\xi_j^1|A\right\|\right)$$

$$\leq \left\|\xi^0|\ell_1^{s_0}(A)\right\| + t\ \left\|\xi^1|\ell_1^{s_1}(A)\right\|$$

$$\underset{\inf}{\Longrightarrow}\quad \sum_{j=0}^{\infty}\min\left(2^{js_0},t2^{js_1}\right)\|\xi_j|A\| \;\leq\; K\left(t,\xi;\ell_1^{s_0}(A),\ell_1^{s_1}(A)\right)$$

o.B.d.A. $p < \infty$, sonst übliche Modifikation; sei $\xi \in \ell_p^s(A)$

$$
\begin{aligned}
\left\| \xi | \left(\ell_1^{s_0}(A), \ell_1^{s_1}(A)\right)_{\theta,p} \right\|^p &= \int_0^\infty t^{-\theta p}\, K\left(t, \xi; \ell_1^{s_0}(A), \ell_1^{s_1}(A)\right)^p \, \frac{\mathrm{d}t}{t} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{2^{(k-1)(s_0-s_1)}}^{2^{k(s_0-s_1)}} \overbrace{t^{-\theta p}}^{\sim\, 2^{-\theta p k(s_0-s_1)}} \underbrace{K\left(t, \xi; \ell_1^{s_0}(A), \ell_1^{s_1}(A)\right)^p}_{\sim\, \sum_{j=0}^{\infty} \min(2^{js_0}, t 2^{js_1}) \|\xi_j|A\|} \frac{\mathrm{d}t}{t} \\
&\le c_1 \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{-\theta p k(s_0-s_1)} \left[\sum_{j=0}^{\infty} \min\left(2^{js_0}, 2^{k(s_0-s_1)+js_1}\right) \|\xi_j|A\| \right]^p \\
&\underset{-\theta(s_0-s_1)=s-s_0}{=} c_1 \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{kps} \left[\sum_{j=0}^{\infty} \min\left(2^{(j-k)s_0}, 2^{(j-k)s_1}\right) \|\xi_j|A\| \right]^p \\
&\underset{\substack{s_0>s_1 \\ \xi_j=0,\, j<0}}{=} c_1 \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{kps} \left[\sum_{j=-\infty}^{k} 2^{(j-k)s_0} \|\xi_j|A\| + \sum_{j=k+1}^{\infty} 2^{(j-k)s_1} \|\xi_j|A\| \right]^p
\end{aligned}
$$

wählen $\varkappa_0, \varkappa_1$ mit $s_0 > \varkappa_0 > s > \varkappa_1 > s_1$

$$
\underset{\text{Hölder}}{\Longrightarrow} \quad \sum_{j=-\infty}^{k} 2^{(j-k)s_0} \|\xi_j|A\| \le 2^{-ks_0} \underbrace{\left(\sum_{j=-\infty}^{k} 2^{j(s_0-\varkappa_0)p'} \right)^{\frac{1}{p'}}}_{\le\, c\, 2^{k(s_0-\varkappa_0)}} \left(\sum_{j=-\infty}^{k} 2^{j\varkappa_0 p} \|\xi_j|A\|^p \right)^{\frac{1}{p}}
$$

$$
\sum_{j=k+1}^{\infty} 2^{(j-k)s_1} \|\xi_j|A\| \le 2^{-ks_1} \underbrace{\left(\sum_{j=k+1}^{\infty} 2^{j(s_1-\varkappa_1)p'} \right)^{\frac{1}{p'}}}_{\le\, c' 2^{k(s_1-\varkappa_1)}} \left(\sum_{j=k+1}^{\infty} 2^{j\varkappa_1 p} \|\xi_j|A\|^p \right)^{\frac{1}{p}}
$$

$$
\begin{aligned}
\left\| \xi | \left(\ell_1^{s_0}(A), \ell_1^{s_1}(A)\right)_{\theta,p} \right\|^p &\le c \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{kps} \left[2^{-k\varkappa_0 p} \sum_{j=-\infty}^{k} 2^{j\varkappa_0 p} \|\xi_j|A\|^p + 2^{-k\varkappa_1 p} \sum_{j=k+1}^{\infty} 2^{j\varkappa_1 p} \|\xi_j|A\|^p \right] \\
&\le c \left[\sum_{j=-\infty}^{\infty} 2^{j\varkappa_0 p} \|\xi_j|A\|^p \underbrace{\sum_{k=j}^{\infty} 2^{kp(s-\varkappa_0)}}_{\le c_3\, 2^{jp(s-\varkappa_0)}} + \sum_{j=-\infty}^{\infty} 2^{j\varkappa_1 p} \|\xi_j|A\|^p \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{j-1} 2^{kp(s-\varkappa_1)}}_{\le c_4\, 2^{jp(s-\varkappa_1)}} \right] \\
&\le c' \sum_{j=-\infty}^{\infty} 2^{jsp} \underbrace{\|\xi_j|A\|^p}_{0,\, j<0} = c' \left\| \xi | \ell_p^s(A) \right\|
\end{aligned}
$$

$$
\Longrightarrow \quad \ell_p^s \hookrightarrow \left(\ell_1^{s_0}(A), \ell_1^{s_1}(A)\right)_{\theta,p}
$$

<u>3. Schritt</u> : aus 1. und 2. Schritt folgt

$$
\ell_p^s \hookrightarrow \left(\ell_1^{s_0}(A), \ell_1^{s_1}(A)\right)_{\theta,p} \underset{\text{Lemma 4.2}}{\hookrightarrow} \left(\ell_{p_0}^{s_0}(A), \ell_{p_1}^{s_1}(A)\right)_{\theta,p} \underset{\text{Lemma 4.2}}{\hookrightarrow} \left(\ell_\infty^{s_0}(A), \ell_\infty^{s_1}(A)\right)_{\theta,p} \hookrightarrow \ell_p^s(A) \qquad \square
$$

Bemerkung : Beweis à la [Tri78, Thm. 1.18.2], erstmals [Tri73]; Ergebnis in Peetre (1967) wesentlich in Satz 1 : $s_0 \neq s_1$ $\dashrightarrow$ betrachten jetzt $s_0 = s_1$

o.B.d.A. $s_0 = s_1 = 0$ (sonst $\eta_j := 2^{js}\xi_j,\ \eta \in \ell_p(A) = \ell_p^0(A) \iff \xi \in \ell_p^s(A)$)

$p < \infty,\ \xi \in \ell_p(A) \implies \lim\limits_{j\to\infty} \|\xi_j|A\| = 0$ $\dashrightarrow$ Umordnung $\xi^* = \{\xi_j^*\}_{j=0}^\infty$ mit

$$\|\xi_0^*|A\| \geq \|\xi_1^*|A\| \geq \|\xi_2^*|A\| \geq \cdots \geq \|\xi_j^*|A\| \geq \cdots \geq 0\,.$$

Definition 2 *Seien A ein Banach-Raum, $1 \leq p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$. Dann ist $\ell_{p,q}(A)$ der Raum aller Folgen $\xi = \{\xi_j\}_{j=0}^\infty$, $\xi_j \in A$, $j \in \mathbb{N}_0$, für die gilt*

$$\|\xi|\ell_{p,q}(A)\| := \left\{ \begin{array}{ll} \left(\sum\limits_{j=0}^\infty \left[(j+1)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \ \|\xi_j^*|A\| \right]^q \right)^{\frac{1}{q}} & ,\quad q < \infty \\ \sup\limits_{j\in\mathbb{N}_0} (j+1)^{\frac{1}{p}} \ \|\xi_j^*|A\| & ,\quad q = \infty \end{array} \right\} < \infty\,.$$

Bemerkung :

- $\ell_{p,q}$ *Lorentz*[21]- Folgenraum, $\ell_{p,p}(A) = \ell_p(A),\ 1 \leq p < \infty$
- Monotonie : $\ell_{p,q}(A) \hookrightarrow \ell_{p,u}(A),\ 1 \leq p < \infty,\ 1 \leq q \leq u \leq \infty$
  $\ell_{p,q}(A) \hookrightarrow \ell_{r,u}(A),\ 1 \leq p < r < \infty,\ 1 \leq q, u \leq \infty$
- $\|\cdot|\ell_{p,q}(A)\|$ i.a. nur Quasi-Norm : $x \in A,\ x \neq 0,\ 0 < \lambda < 1$, o.B.d.A. $p < q < \infty$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \xi & := (x, \lambda x, 0, 0, \dots) \\ \eta & := (0, (1-\lambda)x, 0, \dots) \\ \xi + \eta & = (x, x, 0, 0, \dots) \end{array} \right\} \in \ell_{p,q}(A), \quad \left\{ \begin{array}{ll} \xi^* & = (x, \lambda x, 0, 0, \dots) = \xi \\ \eta^* & = ((1-\lambda)x, 0, \dots) \\ (\xi+\eta)^* & = (x, x, 0, 0, \dots) = \xi + \eta \end{array} \right\}$$

$$\begin{array}{lcccl} \|\xi|\ell_{p,q}\| & = & \left(\|x|A\|^q + 2^{\frac{q}{p}-1}\ \lambda^q \|x|A\|^q \right)^{\frac{1}{q}} & = & \|x|A\| \left(1 + 2^{\frac{q}{p}-1}\ \lambda^q\right)^{\frac{1}{q}} \\ \|\eta|\ell_{p,q}\| & & & = & (1-\lambda)\|x|A\| \\ \|\xi+\eta|\ell_{p,q}\| & = & \left(\|x|A\|^q + 2^{\frac{q}{p}-1}\ \|x|A\|^q \right)^{\frac{1}{q}} & = & \|x|A\| \left(1 + 2^{\frac{q}{p}-1}\right)^{\frac{1}{q}} \end{array}$$

$$\underbrace{\|x|A\| \left(1 + 2^{\frac{q}{p}-1}\right)^{\frac{1}{q}}}_{\|\xi+\eta|\ell_{p,q}\|} \overset{?}{\leq} \underbrace{\|x|A\| \left[\left(1 + 2^{\frac{q}{p}-1}\lambda^q\right)^{\frac{1}{q}} + 1 - \lambda \right]}_{\|\xi|\ell_{p,q}\| + \|\eta|\ell_{p,q}\|}$$

z.B. $p = 1,\ q = 2$, Beh. : $\exists\ \lambda \in (0,1)\ :\ \underbrace{\left(1 + 2^{\frac{q}{p}-1}\right)^{\frac{1}{q}}}_{\sqrt{3}} > \underbrace{\left(1 + 2^{\frac{q}{p}-1}\ \lambda^q\right)^{\frac{1}{q}} + 1 - \lambda}_{\sqrt{1+2\lambda^2}+1-\lambda}$

$$\iff (\lambda + \sqrt{3} - 1)^2 > 1 + 2\lambda^2 \iff \underbrace{\sqrt{3} - 1 - \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}}_{0.4641\dots} < \lambda < \underbrace{\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} + \sqrt{3} - 1}_{1}$$

Satz 2 *Seien A ein Banach-Raum, $1 \leq q \leq \infty$, $0 < \theta < 1$. Dann gilt*

$$(\ell_1(A), \ell_\infty(A))_{\theta,q} = \ell_{\frac{1}{1-\theta},q}(A)\,.$$

[21] George G. Lorentz (* 25.2.1910 St. Petersburg † 1.1.2006 Chico/California)

B e w e i s : <u>1. Schritt</u> : sei $\xi \in \ell_1(A) + \ell_\infty(A) = \ell_\infty(A)$,

$$K(t,\xi;\ell_1(A),\ell_\infty(A)) = \inf_{\substack{\xi = \xi^0 + \xi^1 \\ \xi^0 \in \ell_1(A),\, \xi^1 \in \ell_\infty(A)}} \left(\left\|\xi^0|\ell_1(A)\right\| + t \left\|\xi^1|\ell_\infty(A)\right\| \right) \underset{\substack{\xi^0 = 0 \\ \xi^1 = \xi}}{\leq} t \underbrace{\|\xi_0^*|A\|}_{\|\xi|\ell_\infty(A)\|}$$

$$\xi = \xi^0 + \xi^1 \underset{\substack{\text{Umordnung} \\ 0<t\leq 1}}{\Longrightarrow} t\,\|\xi_0^*|A\| \leq \left\|\xi^0|\ell_1(A)\right\| + t\left\|\xi^1|\ell_\infty(A)\right\| \underset{\inf}{\Longrightarrow} t\,\|\xi_0^*|A\| \leq K(t,\xi;\ell_1(A),\ell_\infty(A))$$

$$\Longrightarrow \quad K(t,\xi;\ell_1(A),\ell_\infty(A)) = t\ \|\xi_0^*|A\|\ , \quad 0 < t \leq 1 \tag{1}$$

Sei $\xi \in \ell_\infty(A),\ \xi = \xi^0 + \xi^1 \underset{\text{Umordnung}}{\Longrightarrow} \exists\, r(k)\ : \xi_k^* = \xi_{r(k)}\ , \quad \|\xi_k^*|A\| = \left\|\xi_{r(k)}|A\right\| \leq \left\|\xi^0_{r(k)}|A\right\| + \left\|\xi^1_{r(k)}|A\right\|$

$$\Longrightarrow \quad \sum_{k=0}^{j-1} \|\xi_k^*|A\| \leq \underbrace{\sum_{k=0}^{j-1}\left\|\xi^0_{r(k)}|A\right\|}_{\leq\ \|\xi^0|\ell_1(A)\|} + \underbrace{\sum_{k=0}^{j-1}\left\|\xi^1_{r(k)}|A\right\|}_{\leq\ j\ \|\xi^1|\ell_\infty(A)\|} \leq \left\|\xi^0|\ell_1(A)\right\| + j\ \left\|\xi^1|\ell_\infty(A)\right\|$$

$$\underset{\inf}{\Longrightarrow} \sum_{k=0}^{j-1}\|\xi_k^*|A\| \leq K(j,\xi;\ell_1(A),\ell_\infty(A))$$

Sei für die Zuordnung $\xi_k^* \longleftrightarrow \xi_{r(k)}$ eine Zerlegung $\xi = \widehat{\xi}^0 + \widehat{\xi}^1$ so gewählt, dass

$$\widehat{\xi}^0_{r(k)} = \left\{\begin{matrix} \xi_{r(k)} - \dfrac{\xi_{r(k)}}{\left\|\xi_{r(k)}|A\right\|}\ \left\|\xi^*_{j-1}|A\right\| = \xi_k^* - \dfrac{\xi_k^*}{\|\xi_k^*|A\|}\ \left\|\xi^*_{j-1}|A\right\| & , k = 0,1,\ldots,j-1 \\ 0 & , k \geq j \end{matrix}\right\}, \quad \widehat{\xi}^1 = \xi - \widehat{\xi}^0$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad \left\|\widehat{\xi}^0|\ell_1(A)\right\| &= \sum_{r=0}^{\infty}\left\|\widehat{\xi}^0_r|A\right\| = \sum_{k=0}^{j-1}\left\|\xi_k^* - \frac{\xi_k^*}{\|\xi_k^*|A\|}\ \left\|\xi^*_{j-1}|A\right\|\,\Big|A\right\| \\
&= \sum_{k=0}^{j-1}\|\xi_k^*|A\|\ \underbrace{\left|1 - \frac{\left\|\xi^*_{j-1}|A\right\|}{\|\xi_k^*|A\|}\right|}_{=1-\frac{\|\xi^*_{j-1}|A\|}{\|\xi_k^*|A\|},\ \|\xi^*_{j-1}|A\|\leq\|\xi_k^*|A\|} = \sum_{k=0}^{j-1}\|\xi_k^*|A\| - \underbrace{\sum_{k=0}^{j-1}\left\|\xi^*_{j-1}|A\right\|}_{j\ \|\xi^*_{j-1}|A\|} \\
&= \sum_{k=0}^{j-1}\|\xi_k^*|A\| - j\ \left\|\xi^*_{j-1}|A\right\|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left\|\widehat{\xi}^1|\ell_\infty(A)\right\| &= \sup_{r\in\mathbb{N}_0}\left\|\widehat{\xi}^1_r|A\right\| \\
&= \max\left\{ \underbrace{\sup_{k=0,\ldots,j-1}\left\|\xi_{r(k)} - \underbrace{\left(\xi_{r(k)} - \frac{\xi_{r(k)}}{\left\|\xi_{r(k)}|A\right\|}\ \left\|\xi^*_{j-1}|A\right\|\right)}_{\widehat{\xi}^0_{r(k)}}\Big|A\right\|}_{=\ \|\xi^*_{j-1}|A\|}\ ,\ \underbrace{\sup_{r\notin\{r(0),\ldots,r(j-1)\}}\left\|\underbrace{\xi_r}_{=\widehat{\xi}^1_r,\widehat{\xi}^0_r=0}\ |A\right\|}_{\leq\ \|\xi^*_{j-1}|A\|} \right\} \\
&\leq \left\|\xi^*_{j-1}|A\right\|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\underset{\inf}{\Longrightarrow} K(j,\xi;\ell_1(A),\ell_\infty(A)) &\leq \left\|\widehat{\xi}^0|\ell_1(A)\right\| + j\ \left\|\widehat{\xi}^1|\ell_\infty(A)\right\| \\
&\leq \underbrace{\sum_{k=0}^{j-1}\|\xi_k^*|A\| - j\ \left\|\xi^*_{j-1}|A\right\|}_{\|\widehat{\xi}^0|A\|} + j\ \underbrace{\left\|\xi^*_{j-1}|A\right\|}_{\|\widehat{\xi}^1|\ell_\infty(A)\|} = \sum_{k=0}^{j-1}\|\xi_k^*|A\|
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad K\left(j,\xi;\ell_1(A),\ell_\infty(A)\right) \;=\; \sum_{k=0}^{j-1} \|\xi_k^*|A\| \;, \quad j\in\mathbb{N} \tag{2}$$

2. Schritt : zeigen $\quad \left(\ell_1(A),\ell_\infty(A)\right)_{\theta,q} \;\hookrightarrow\; \ell_{\frac{1}{1-\theta},q}(A);\quad$ sei zuerst $\boxed{q<\infty}$

$$\begin{aligned}
\left\|\xi|\left(\ell_1(A),\ell_\infty(A)\right)_{\theta,q}\right\|^q &= \int_0^\infty t^{-\theta q} K\left(t,\xi;\ell_1(A),\ell_\infty(A)\right)^q \frac{\mathrm{d}t}{t} = \sum_{j=0}^\infty \int_j^{j+1} t^{-\theta q-1} K\left(t,\xi;\ell_1(A),\ell_\infty(A)\right)^q \,\mathrm{d}t \\
&\geq \sum_{j=1}^\infty (j+1)^{-\theta q-1} \underbrace{K\left(j,\xi;\ell_1(A),\ell_\infty(A)\right)^q}_{\underset{(2)}{=}\left(\sum_{k=0}^{j-1}\|\xi_k^*|A\|\right)^q \geq j^q\,\left\|\xi_{j-1}^*|A\right\|^q} \geq \sum_{j=1}^\infty (j+1)^{-\theta q-1}\, j^q\,\left\|\xi_{j-1}^*|A\right\|^q \\
&= \sum_{j=1}^\infty j^{(1-\theta)q-1} \underbrace{\left(\frac{j+1}{j}\right)^{-\theta q-1}}_{\leq 2} \left\|\xi_{j-1}^*|A\right\|^q \geq c \underbrace{\sum_{j=1}^\infty \left[j^{(1-\theta)-\frac{1}{q}}\left\|\xi_{j-1}^*|A\right\|\right]^q}_{=\left\|\xi|\ell_{\frac{1}{1-\theta},q}(A)\right\|^q} \\
&\geq c\,\left\|\xi|\ell_{\frac{1}{1-\theta},q}(A)\right\|^q
\end{aligned}$$

$\boxed{q=\infty}$

$$\begin{aligned}
\left\|\xi|\left(\ell_1(A),\ell_\infty(A)\right)_{\theta,\infty}\right\| &= \sup_{0<t<\infty} t^{-\theta} K\left(t,\xi;\ell_1(A),\ell_\infty(A)\right) \geq \sup_{j\in\mathbb{N}} j^{-\theta}\, \overbrace{K\left(j,\xi;\ell_1(A),\ell_\infty(A)\right)}^{\underset{(2)}{=}\sum_{k=0}^{j-1}\|\xi_k^*|A\|\geq j\,\left\|\xi_{j-1}^*|A\right\|} \\
&\geq \sup_{j\in\mathbb{N}} j^{1-\theta}\left\|\xi_{j-1}^*|A\right\| = \left\|\xi|\ell_{\frac{1}{1-\theta},\infty}(A)\right\|
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad \left(\ell_1(A),\ell_\infty(A)\right)_{\theta,q} \;\hookrightarrow\; \ell_{\frac{1}{1-\theta},q}(A)\;,\;\; 1\leq q\leq\infty$$

3. Schritt : zeigen $\quad \ell_{\frac{1}{1-\theta},q}(A) \;\hookrightarrow\; \left(\ell_1(A),\ell_\infty(A)\right)_{\theta,q};\quad$ sei zunächst $\boxed{q<\infty}$

$$\begin{aligned}
\left\|\xi|\left(\ell_1(A),\ell_\infty(A)\right)_{\theta,q}\right\|^q &= \sum_{j=0}^\infty \int_j^{j+1} t^{-\theta q} K\left(t,\xi;\ell_1(A),\ell_\infty(A)\right)^q \frac{\mathrm{d}t}{t} \\
&\leq \int_0^1 t^{-\theta q} \underbrace{K\left(t,\xi;\ell_1(A),\ell_\infty(A)\right)^q}_{\underset{(1)}{=}\, t^q\,\|\xi_0^*|A\|^q} \frac{\mathrm{d}t}{t} + \sum_{j=1}^\infty j^{-\theta q-1} \underbrace{K\left(j+1,\xi;\ell_1(A),\ell_\infty(A)\right)^q}_{\leq 2\,K(j,\xi;\ell_1(A),\ell_\infty(A)),\;K(\cdot,\xi)\text{ konkav}} \\
&= \|\xi_0^*|A\|^q \underbrace{\int_0^1 t^{(1-\theta)q}\frac{\mathrm{d}t}{t}}_{C_{\theta,q}} + 2^q \sum_{j=1}^\infty j^{-\theta q-1} \underbrace{K\left(j,\xi;\ell_1(A),\ell_\infty(A)\right)^q}_{\underset{(2)}{=}\left(\sum_{k=0}^{j-1}\|\xi_k^*|A\|\right)^q} \\
&\leq c_1\left[\|\xi_0^*|A\|^q + \sum_{j=1}^\infty j^{-\theta q-1}\left(\sum_{k=0}^{j-1}\|\xi_k^*|A\|\right)^q\right]
\end{aligned} \tag{3}$$

sei $0<\varepsilon<\theta \underset{\text{Hölder}}{\Longrightarrow}$
$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=0}^{j-1} \|\xi_k^*|A\|\right)^q &= \left(\sum_{k=1}^{j} k^{(1-\theta)+\varepsilon-\frac{1}{q}} \left\|\xi_{k-1}^*|A\right\| k^{-(1-\theta)-\varepsilon+\frac{1}{q}}\right)^q \\ &\le \left(\sum_{k=1}^{j} k^{(1-\theta)q+\varepsilon q-1} \left\|\xi_{k-1}^*|A\right\|^q\right) \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{j} k^{-(1-\theta)q'-\varepsilon q'+\frac{q'}{q}}\right)^{\frac{q}{q'}}}_{\left(\sum_{k=1}^{j} k^{\theta q'-\varepsilon q'-1}\right)^{\frac{q}{q'}} \le c_2\, j^{(\theta-\varepsilon)q}} \\ &\le c_2\, j^{(\theta-\varepsilon)q} \sum_{k=1}^{j} k^{(1-\theta)q+\varepsilon q-1} \left\|\xi_{k-1}^*|A\right\|^q\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underset{(3)}{\Longrightarrow} \left\|\xi|\left(\ell_1(A),\ell_\infty(A)\right)_{\theta,q}\right\|^q &\le c_3\left[\|\xi_0^*|A\|^q + \sum_{j=1}^{\infty} j^{-\varepsilon q-1} \sum_{k=1}^{j} k^{(1-\theta)q+\varepsilon q-1} \left\|\xi_{k-1}^*|A\right\|^q\right] \\ &\le c_4\left[\|\xi_0^*|A\|^q + \sum_{k=1}^{\infty} k^{(1-\theta)q+\varepsilon q-1} \left\|\xi_{k-1}^*|A\right\|^q \underbrace{\sum_{j=k}^{\infty} j^{-\varepsilon q-1}}_{\le c_5\, k^{-\varepsilon q}}\right] \\ &\le c_6\left[\|\xi_0^*|A\|^q + \sum_{k=1}^{\infty} k^{(1-\theta)q-1} \left\|\xi_{k-1}^*|A\right\|^q\right] \\ &\le c_7 \sum_{k=1}^{\infty} k^{(1-\theta)q-1} \left\|\xi_{k-1}^*|A\right\|^q = \left\|\xi|\ell_{\frac{1}{1-\theta},q}(A)\right\|^q\end{aligned}$$

$\boxed{q=\infty}$

$$\begin{aligned}\left\|\xi|\left(\ell_1(A),\ell_\infty(A)\right)_{\theta,\infty}\right\| &= \sup_{0<t<\infty} t^{-\theta} K\left(t,\xi;\ell_1(A),\ell_\infty(A)\right) \\ &\le \max\left\{\sup_{0<t<1} t^{-\theta} \underbrace{K\left(t,\xi;\ell_1(A),\ell_\infty(A)\right)}_{\underset{(1)}{=}\ t\, \|\xi_0^*|A\|}, \sup_{j\in\mathbb{N}} \underbrace{\sup_{j\le t\le j+1} t^{-\theta} K\left(t,\xi;\ell_1(A),\ell_\infty(A)\right)}_{\le j^{-\theta}K(j+1,\xi;\ell_1(A),\ell_\infty(A))}\right\} \\ &\le \max\left\{\underbrace{\sup_{0<t<1} t^{1-\theta}}_{1} \|\xi_0^*|A\|,\ 2\sup_{j\in\mathbb{N}} j^{-\theta} \underbrace{K\left(j,\xi;\ell_1(A),\ell_\infty(A)\right)}_{\underset{(2)}{=} \sum_{k=0}^{j-1} \|\xi_k^*|A\| \le \sup_{k=0,\dots,j-1} k^{1-\theta}\|\xi_k^*|A\| \left(\sum_{k=0}^{j-1} k^{-(1-\theta)}\right)}\right\} \\ &\le c\ \max\left\{\|\xi_0^*|A\|,\ \sup_{j\in\mathbb{N}} j^{-\theta} \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{j-1} k^{-(1-\theta)}\right)}_{\le\ c\ j^\theta} \sup_{k=0,\dots,j-1} k^{1-\theta} \|\xi_k^*|A\|\right\} \\ &\le c' \max\left\{\|\xi_0^*|A\|,\ \sup_{j\in\mathbb{N}} \sup_{k=0,\dots,j-1} k^{1-\theta} \|\xi_k^*|A\|\right\} \\ &\le c' \sup_{j\in\mathbb{N}_0} j^{1-\theta} \left\|\xi_j^*|A\right\| \le c' \left\|\xi|\ell_{\frac{1}{1-\theta},\infty}(A)\right\|\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad \ell_{\frac{1}{1-\theta},q}(A) \hookrightarrow \left(\ell_1(A),\ell_\infty(A)\right)_{\theta,q}, \quad 1\le q\le\infty \qquad \Box$$

Bemerkung :

- als Interpolationsraum ist $\ell_{\frac{1}{1-\theta},q}(A) = (\ell_1(A), \ell_\infty(A))_{\theta,q}$ Banachraum (mit $\|\cdot|(\ell_1(A),\ell_\infty(A))_{\theta,q}\|$), sonst ist $\|\cdot|\ell_{\frac{1}{1-\theta},q}(A)\|$ i.a. nur Quasi-Norm
- *später* (Folg. 7.1) : $\big(\ell_{p_0}(A), \ell_{p_1}(A)\big)_{\theta,q} = \ell_{p,q}(A)$, $0<\theta<1$, $1<p_0,p_1<\infty$, $p_0 \neq p_1$, $1 \le q \le \infty$, $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$, d.h. insbesondere

$$\big(\ell_{p_0}(A), \ell_{p_1}(A)\big)_{\theta,p} = \ell_p(A) \ , \quad \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$$

6 Die J-Methode

Sei $\{A_0, A_1\}$ Interpolationspaar. Das *Peetre'sche J-Funktional* ist definiert als

$$J(t,a;A_0,A_1) = J(t,a) := \max\Big(\|a|A_0\|, t\,\|a|A_1\|\Big) \ , \quad a \in A_0 \cap A_1, \quad t>0$$

Bemerkung :

- wenn $\{A_0, A_1\}$ fixiert $\dashrightarrow$ $J(t,a)$ anstelle von $J(t,a;A_0,A_1)$
- $J(1,a) = \|a|A_0 \cap A_1\|$, für jedes feste $t>0$: $J(t,a) \sim \|a|A_0\cap A_1\|$ (äquivalente Norm)

Lemma 1 *Sei $a \in A_0 \cap A_1$. Dann ist die Funktion $J(t,a)$ für $t>0$ positiv, monoton wachsend und konvex. Es gilt*

$$\min(1,t)\ \|a|A_0\cap A_1\| \ \le\ J(t,a)\ \le\ \max(1,t)\ \|a|A_0\cap A_1\| \ , \quad 0<t<\infty \ .$$

Außerdem gelten für $s>0$

$$J(t,a) \ \le\ \max\left(1,\frac{t}{s}\right)\ J(s,a) \ , \qquad K(t,a)\ \le\ \min\left(1,\frac{t}{s}\right)\ J(s,a) \ . \tag{1}$$

B e w e i s : *klar* : positiv, monoton wachsend, 1. Ungleichungskette

$\boxed{\text{z.z.}}$: $J(t,a)$ konvex, d.h. $J\left((1-\lambda)t_1 + \lambda t_2, a\right) \le (1-\lambda)J(t_1,a) + \lambda J(t_2,a)$, $\quad 0<\lambda<1$

Seien $0<t_1<t<t_2<\infty$, $0<\lambda<1$

$$\begin{aligned}
J\big((1-\lambda)t_1+\lambda t_2, a\big) &= \max\Big(\underbrace{\|a|A_0\|}_{=(1-\lambda+\lambda)\|a|A_0\|}, \big((1-\lambda)t_1+\lambda t_2\big)\ \|a|A_1\|\Big) \\
&\le \max\Big((1-\lambda)\|a|A_0\|, (1-\lambda)t_1\ \|a|A_1\|\Big) + \max\Big(\lambda\ \|a|A_0\|, \lambda t_2\ \|a|A_1\|\Big) \\
&= (1-\lambda)\ \underbrace{\max\Big(\|a|A_0\|, t_1\ \|a|A_1\|\Big)}_{J(t_1,a)} + \lambda\ \underbrace{\max\Big(\|a|A_0\|, t_2\ \|a|A_1\|\Big)}_{J(t_2,a)}
\end{aligned}$$

zu (1) : $J(t,a) = \max\Big(\|a|A_0\|, \overbrace{\frac{t}{s}s}^{t}\ \|a|A_1\|\Big) \ \le\ \max\left(1,\frac{t}{s}\right)\ J(s,a)$, $s>0$

$a \in A_0\cap A_1 \quad \Longrightarrow \quad K(t,a) \le \|a|A_0\| \le J(s,a), \quad K(t,a) \le t\ \|a|A_1\| \le \frac{t}{s}\ J(s,a), \ \ s>0$

$\underset{\inf}{\Longrightarrow}\ K(t,a)\ \le\ \min\left(1,\frac{t}{s}\right)\ J(s,a)$ $\square$

Definition 1 *Seien* $\{A_0, A_1\}$ *ein Interpolationspaar,* $0 < \theta < 1$ *und* $1 \le q \le \infty$. *Dann ist*

$$(A_0, A_1)^{\mathcal{J}}_{\theta,q} := \Big\{ a \in A_0 + A_1 : \text{es existiert eine stetige } A_0 \cap A_1\text{-wertige Funktion } u : \mathbb{R}^1_+ \longrightarrow A_0 \cap A_1 \ \text{mit} \ a = \int_0^\infty u(t)\, \tfrac{\mathrm{d}t}{t} \ \text{in } A_0 + A_1 \ \text{und} \ \Phi_{\theta,q}\left(J(t, u(t))\right) < \infty \Big\}.$$

Man setzt

$$\left\| a \right| (A_0, A_1)^{\mathcal{J}}_{\theta,q} \Big\| := \inf_u \ \Phi_{\theta,q}\Big(J(\cdot, u(\cdot))\Big).$$

Bemerkung :

- $$\left\| a \right| (A_0, A_1)^{\mathcal{J}}_{\theta,q} \Big\| = \inf_u \left\{ \begin{array}{lcl} \left(\int\limits_0^\infty \left[t^{-\theta} \ J(t, u(t)) \right]^q \ \frac{\mathrm{d}t}{t} \right)^{\frac{1}{q}} & , & q < \infty \\ \sup\limits_{0<t<\infty} \ t^{-\theta} \ J(t, u(t)) & , & q = \infty \end{array} \right\}$$
- $\int\limits_0^\infty \underbrace{u(s)}_{\in A_0 \cap A_1} \ \frac{\mathrm{d}s}{s}$ ... Bochner [22]-Integral, Konvergenz in $A_0 + A_1$

$u : \mathbb{R}^1_+ \longrightarrow A_0 \cap A_1$ *stetig* kann abgeschwächt werden; zulässig sind z.B. Treppenfunktionen, sofern sich die Unstetigkeitspunkte in $(0, \infty)$ nicht häufen : sei $u : \mathbb{R}^1_+ \longrightarrow A_0 \cap A_1$ eine solche Treppenfunktion mit $a = \int_0^\infty u(t)\ \frac{\mathrm{d}t}{t}$ und $\Phi_{\theta,q}\left(J(t, u(t))\right) < \infty$, konstruieren mit u stetiges $\widetilde{u} : \mathbb{R}^1_+ \longrightarrow A_0 \cap A_1$, so dass

$$a = \int_0^\infty \widetilde{u}(t) \ \frac{\mathrm{d}t}{t}, \qquad \Phi_{\theta,q}\left(J(t, \widetilde{u}(t))\right) < \infty \quad \Longrightarrow \quad a \in (A_0, A_1)^{\mathcal{J}}_{\theta,q}$$

sei $\varphi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \overline{\mathbb{R}_+}$, $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$ gegeben, z.B.

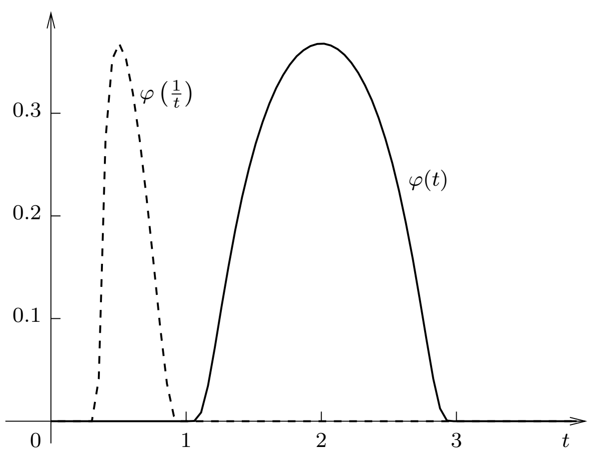
$$\varphi(t) := \left\{ \begin{array}{lcl} e^{-\frac{1}{1-(t-2)^2}} & , & |t-2| < 1 \\ 0 & , & \text{sonst} \end{array} \right.$$

o.B.d.A. $\displaystyle\int_0^\infty \varphi\left(\frac{1}{t}\right) \ \frac{\mathrm{d}t}{t} := 1$

$$0 < \lambda < \infty \underset{\tau := \frac{t}{\lambda}}{\Longrightarrow} \int_0^\infty \varphi\left(\frac{\lambda}{\tau}\right) \ \frac{\mathrm{d}\tau}{\tau} = 1$$

$$\widetilde{u}(s) := \int_0^\infty \varphi\left(\frac{s}{\tau}\right) u(\tau) \ \frac{\mathrm{d}\tau}{\tau} \underset{t = \frac{\tau}{s}}{=} \int_0^\infty \varphi\left(\frac{1}{t}\right) \underbrace{u(st)}_{\in A_0 \cap A_1} \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

$\curvearrowright$ $\widetilde{u} : \mathbb{R}^1_+ \longrightarrow A_0 \cap A_1$ stetig,



[22]Salomon Bochner (* 20.8.1899 Kraków † 2.5.1982 Houston)

$$\int_0^\infty \widetilde{u}(s)\,\frac{\mathrm{d}s}{s} = \int_0^\infty \underbrace{\int_0^\infty \varphi\left(\frac{1}{t}\right) u(st)\,\frac{\mathrm{d}t}{t}}_{\widetilde{u}(s)}\,\frac{\mathrm{d}s}{s} = \int_0^\infty \varphi\left(\frac{1}{t}\right) \int_0^\infty u(st)\,\frac{\mathrm{d}s}{s}\,\frac{\mathrm{d}t}{t} \underset{\tau = st}{=} \int_0^\infty \varphi\left(\frac{1}{t}\right) \underbrace{\int_0^\infty u(\tau)\,\frac{\mathrm{d}\tau}{\tau}}_{a}\,\frac{\mathrm{d}t}{t}$$

$$= a \underbrace{\int_0^\infty \varphi\left(\frac{1}{t}\right)\frac{\mathrm{d}t}{t}}_{1} = a$$

$$\begin{aligned}
J(t,\widetilde{u}(t)) &= \max\left(\left\| \int_0^\infty \varphi\left(\frac{1}{\tau}\right) u(t\tau)\,\frac{\mathrm{d}\tau}{\tau}\Big| A_0\right\|,\ t\left\| \int_0^\infty \varphi\left(\frac{1}{\tau}\right) u(t\tau)\,\frac{\mathrm{d}\tau}{\tau}\Big| A_1\right\|\right) \\
&\leq \max\left(\int_0^\infty \varphi\left(\frac{1}{\tau}\right) \|u(t\tau)|A_0\|\,\frac{\mathrm{d}\tau}{\tau},\ t\int_0^\infty \varphi\left(\frac{1}{\tau}\right) \|u(t\tau)|A_1\|\,\frac{\mathrm{d}\tau}{\tau}\right) \\
&\leq \int_0^\infty \varphi\left(\frac{1}{\tau}\right) \underbrace{\max\left(\|u(t\tau)|A_0\|,t\ \|u(t\tau)|A_1\|\right)}_{J(t,u(t\tau))}\frac{\mathrm{d}\tau}{\tau} \quad = \int_0^\infty \varphi\left(\frac{1}{\tau}\right) J(t,u(t\tau))\frac{\mathrm{d}\tau}{\tau}
\end{aligned}$$

o.B.d.A. $q < \infty$

$$\begin{aligned}
\Phi_{\theta,q}\left(J(t,\widetilde{u}(t))\right) &\leq \left(\int_0^\infty t^{-\theta q}\ \underbrace{\left(\int_0^\infty \varphi\left(\frac{1}{\tau}\right) J(t,u(t\tau))\frac{\mathrm{d}\tau}{\tau}\right)^q}_{J(t,\widetilde{u}(t))^q \leq}\ \frac{\mathrm{d}t}{t}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\underset{23}{\leq} \int_0^\infty \varphi\left(\frac{1}{\tau}\right)\left(\int_0^\infty t^{-\theta q}\ J(t,u(t\tau))^q\ \frac{\mathrm{d}t}{t}\right)^{\frac{1}{q}}\frac{\mathrm{d}\tau}{\tau} \\
&= \int_0^1 \varphi\left(\frac{1}{\tau}\right)\underbrace{\left(\int_0^\infty t^{-\theta q}\ \underbrace{J(t,u(t\tau))}_{\leq \frac{1}{\tau}J(t\tau,u(t\tau))}{}^q\ \frac{\mathrm{d}t}{t}\right)^{\frac{1}{q}}}_{\leq \tau^{-(1-\theta)}\ \Phi_{\theta,q}(J(t,u(t)))}\frac{\mathrm{d}\tau}{\tau} + \int_1^\infty \varphi\left(\frac{1}{\tau}\right)\underbrace{\left(\int_0^\infty t^{-\theta q}\ \underbrace{J(t,u(t\tau))}_{\leq J(t\tau,u(t\tau))}{}^q\ \frac{\mathrm{d}t}{t}\right)^{\frac{1}{q}}}_{\leq \tau^{\theta}\ \Phi_{\theta,q}(J(t,u(t)))}\frac{\mathrm{d}\tau}{\tau}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow\quad \Phi_{\theta,q}\left(J(t,\widetilde{u}(t))\right) &\leq \Phi_{\theta,q}\left(J(t,u(t))\right)\left[\underbrace{\int_0^1 \tau^{-(1-\theta)}\ \overbrace{\varphi\left(\frac{1}{\tau}\right)}^{=0 \text{ für } \tau\leq a_1}\ \frac{\mathrm{d}\tau}{\tau}}_{\leq\ C_{\varphi,\theta}} + \underbrace{\int_1^\infty \tau^{\theta}\ \overbrace{\varphi\left(\frac{1}{\tau}\right)}^{=0 \text{ für } \tau\geq a_2}\ \frac{\mathrm{d}\tau}{\tau}}_{\leq\ C'_{\varphi,\theta}}\right] \\
&\leq c\ \Phi_{\theta,q}\left(J(t,u(t))\right)
\end{aligned}$$

da $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+) \quad \Longrightarrow \quad \exists\ 0 < a_1 < a_2 < \infty \quad \forall\ s \notin (a_1,a_2)\ :\ \varphi\left(\frac{1}{s}\right) = 0$

[23] verallgemeinerte Dreiecksungleichung für Integrale, [HLP52, Thm. 202, p. 148]

Satz 1 *Seien* $\{A_0, A_1\}$ *ein Interpolationspaar,* $0 < \theta < 1$ *und* $1 \le q \le \infty$.

(i) *Dann ist* $(A_0, A_1)^{\mathcal{J}}_{\theta,q}$ *ein Interpolationsraum bezüglich* $\{A_0, A_1\}$.

(ii) *Der Funktor* $J_{\theta,q} : \mathfrak{C}_2 \longrightarrow \mathfrak{C}_1$, $J_{\theta,q}\big(\{A_0, A_1\}\big) := (A_0, A_1)^{\mathcal{J}}_{\theta,q}$ *ist exakt vom Typ* θ, *d.h. für alle* $T \in \mathcal{L}(\{A_0, A_1\}, \{B_0, B_1\})$ *gilt*

$$\left\| T | \mathcal{L}\left((A_0, A_1)^{\mathcal{J}}_{\theta,q}, (B_0, B_1)^{\mathcal{J}}_{\theta,q} \right) \right\| \;\le\; \|T|\mathcal{L}(A_0, B_0)\|^{1-\theta} \;\; \|T|\mathcal{L}(A_1, B_1)\|^{\theta} \;. \tag{2}$$

(iii) *Es gilt für alle* $a \in A_0 \cap A_1$

$$\left\| a | \, (A_0, A_1)^{\mathcal{J}}_{\theta,q} \right\| \le \; c \, t^{-\theta} \; J(t, a) \quad . \tag{3}$$

Beweis : <u>1. Schritt</u> : zu (iii), zeigen (3); seien $a \in A_0 \cap A_1$, $s > 0$

$$u(t) := \frac{a}{\ln 2} \, \chi_{[s,2s)}(t) \quad \Longrightarrow \quad \int_0^\infty u(t) \, \frac{\mathrm{d}t}{t} \;=\; \frac{a}{\ln 2} \underbrace{\int_s^{2s} \frac{\mathrm{d}t}{t}}_{\ln 2} \;=\; a$$

$u : \mathbb{R}_+ \longrightarrow A_0 \cap A_1$, Treppenfunktion (eine Stufe) $\underset{\text{Bem.}}{\Longrightarrow}$ $a \in (A_0, A_1)^{\mathcal{J}}_{\theta,q}$, falls $\Phi_{\theta,q}\left(J(t, u(t))\right) < \infty$

$$\begin{aligned}
\Phi_{\theta,q}\left(J(t,u(t))\right)^q &= \int_0^\infty t^{-\theta q} \underbrace{J(t,u(t))}_{\substack{\le \max\left(1, \frac{t}{s}\right) J(s,u(t)) \\ \text{Lemma 1}}}{}^{q} \, \frac{\mathrm{d}t}{t} && \le \int_0^\infty t^{-\theta q} \, \max\left(1, \frac{t}{s}\right)^q \underbrace{J(s,u(t))^q}_{=0, t \notin [s,2s)} \frac{\mathrm{d}t}{t} \\
&= \int_s^{2s} t^{-\theta q} \underbrace{\max\left(1, \frac{t}{s}\right)^q}_{=\frac{t}{s}} \underbrace{J\left(s, \frac{a}{\ln 2}\right)^q}_{J(t,\cdot) \text{ linear}} \frac{\mathrm{d}t}{t} && = \frac{s^{-q}}{(\ln 2)^q} \, J(s,a)^q \underbrace{\int_s^{2s} t^{(1-\theta)q} \, \frac{\mathrm{d}t}{t}}_{\frac{1}{(1-\theta)q} s^{(1-\theta)q} \left(2^{(1-\theta)q} - 1\right)} \\
&\le s^{-\theta q} \, J(s,a)^q \underbrace{\frac{2^{(1-\theta)q} - 1}{(1-\theta)q \; (\ln 2)^q}}_{C_{\theta,q}} && \le C_{\theta,q} \, s^{-\theta q} \, J(s,a)^q
\end{aligned}$$

$$\underset{\inf}{\Longrightarrow} \quad \left\| a | \, (A_0, A_1)^{\mathcal{J}}_{\theta,q} \right\| \le \; C_{\theta,q} \; s^{-\theta} \; J(s,a)$$

<u>2. Schritt</u> : zu (i), z.z. : $(A_0, A_1)^{\mathcal{J}}_{\theta,q}$ Interpolationsraum

$\left\| \cdot | \, (A_0, A_1)^{\mathcal{J}}_{\theta,q} \right\|$ Norm; Vollständigkeit folgt aus Satz 2 unten (*bzw. direkt nachrechnen*)

$\boxed{\text{z.z.}}$: $A_0 \cap A_1 \;\hookrightarrow\; (A_0, A_1)^{\mathcal{J}}_{\theta,q} \;\hookrightarrow\; A_0 + A_1$

(3) $\underset{t=1}{\Longrightarrow}$ $\left\| a | \, (A_0, A_1)^{\mathcal{J}}_{\theta,q} \right\| \le \; C_{\theta,q} \; \underbrace{\|a | A_0 \cap A_1\|}_{J(1,a)}$, $\quad a \in A_0 \cap A_1 \quad \Longrightarrow \quad A_0 \cap A_1 \;\hookrightarrow\; (A_0, A_1)^{\mathcal{J}}_{\theta,q}$

sei $a \in (A_0, A_1)^{\mathcal{J}}_{\theta,q} \quad \Longrightarrow \quad \exists\, u : \mathbb{R}_+ \longrightarrow A_0 \cap A_1 \ : a = \int\limits_0^\infty u(t)\ \frac{\mathrm{d}t}{t}$

$$\begin{aligned}
\|a|A_0+A_1\| &= \left\| \int\limits_0^\infty u(t)\ \frac{\mathrm{d}t}{t}\ \Big| A_0+A_1 \right\| \ \le\ \int\limits_0^\infty \underbrace{\|u(t)|A_0+A_1\|}_{K(1,u(t))}\ \frac{\mathrm{d}t}{t} \\
&\le \int\limits_0^\infty \underbrace{K(1,u(t))}_{\substack{\le \min\left(1,\frac{1}{t}\right) J(t,u(t)) \\ \text{Lemma 1}}}\ \frac{\mathrm{d}t}{t} \quad \le\ \int\limits_0^1 t^{\theta}\ t^{-\theta}\ J(t,u(t))\ \frac{\mathrm{d}t}{t} \ +\ \int\limits_1^\infty t^{-1+\theta}\ t^{-\theta}\ J(t,u(t))\ \frac{\mathrm{d}t}{t} \\
&\underset{\text{Hölder}}{\le} \underbrace{\left(\int\limits_0^1 t^{-\theta q} J(t,u(t))^q \frac{\mathrm{d}t}{t}\right)^{\frac{1}{q}}}_{\le \left\|a|(A_0,A_1)^{\mathcal{J}}_{\theta,q}\right\|} \underbrace{\left(\int\limits_0^1 t^{\theta q'} \frac{\mathrm{d}t}{t}\right)^{\frac{1}{q'}}}_{c_1(\theta,q)} + \underbrace{\left(\int\limits_1^\infty t^{-\theta q} J(t,u(t))^q \frac{\mathrm{d}t}{t}\right)^{\frac{1}{q}}}_{\le \left\|a|(A_0,A_1)^{\mathcal{J}}_{\theta,q}\right\|} \underbrace{\left(\int\limits_1^\infty t^{-(1-\theta)q'} \frac{\mathrm{d}t}{t}\right)^{\frac{1}{q'}}}_{c_2(\theta,q)} \\
&\le\ C_{\theta,q}\ \left\|a|\left(A_0,A_1\right)^{\mathcal{J}}_{\theta,q}\right\|
\end{aligned}$$

<u>3. Schritt</u> : zu (ii), sei $T \in \mathcal{L}\left(\{A_0,A_1\},\{B_0,B_1\}\right)$, o.B.d.A. $T \neq 0$

$\boxed{\text{z.z.}}$: $\left\|T|\mathcal{L}\left((A_0,A_1)^{\mathcal{J}}_{\theta,q}, (B_0,B_1)^{\mathcal{J}}_{\theta,q}\right)\right\| \ \le\ \|T|\mathcal{L}(A_0,B_0)\|^{1-\theta}\ \ \|T|\mathcal{L}(A_1,B_1)\|^{\theta}$

sei $a \in (A_0, A_1)^{\mathcal{J}}_{\theta,q} \quad \Longrightarrow \quad \exists\, u : \mathbb{R}_+ \longrightarrow A_0 \cap A_1 \ : a = \int\limits_0^\infty u(s)\ \frac{\mathrm{d}s}{s} \quad \underset{\text{Def. 3.4, Folg. 3.2}}{\Longrightarrow} \quad Tu : \mathbb{R}_+ \longrightarrow B_0 \cap B_1,$

stetig, $\quad Ta = \int\limits_0^\infty Tu(s)\ \frac{\mathrm{d}s}{s}$ in B_0+B_1,

$$\begin{aligned}
J\left(s, Tu(s)\right) &= \max\left(\|Tu(s)|B_0\|, s\ \|Tu(s)|B_1\|\right) \\
&\le \|T|\mathcal{L}(A_0,B_0)\| \underbrace{\max\Big(\|u(s)|A_0\|,\ \overbrace{s\ \frac{\|T|\mathcal{L}(A_1,B_1)\|}{\|T|\mathcal{L}(A_0,B_0)\|}}^{\tau}\ \|u(s)|A_1\|\Big)}_{J(\tau,u(s);A_0,A_1)}
\end{aligned}$$

o.B.d.A. $q < \infty$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad \Phi_{\theta,q}\left(J(s,Tu(s))\right) &= \left(\int\limits_0^\infty \left[s^{-\theta}\ J(s,Tu(s);B_0,B_1)\right]^q\ \frac{\mathrm{d}s}{s}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\le \|T|\mathcal{L}(A_0,B_0)\| \left(\int\limits_0^\infty \left[s^{-\theta}\ J(\tau,u(s);A_0,A_1)\right]^q\ \frac{\mathrm{d}s}{s}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\underset{\tau = s\ \frac{\|T|\mathcal{L}(A_1,B_1)\|}{\|T|\mathcal{L}(A_0,B_0)\|}}{\le} \|T|\mathcal{L}(A_0,B_0)\| \left(\frac{\|T|\mathcal{L}(A_0,B_0)\|}{\|T|\mathcal{L}(A_1,B_1)\|}\right)^{-\theta} \underbrace{\left(\int\limits_0^\infty \left[\tau^{-\theta}\ J(\tau,\widetilde{u}(\tau);A_0,A_1)\right]^q\ \frac{\mathrm{d}\tau}{\tau}\right)^{\frac{1}{q}}}_{\Phi_{\theta,q}(J(\tau,\widetilde{u}(\tau)))} \\
&= \|T|\mathcal{L}(A_0,B_0)\|^{1-\theta}\ \|T|\mathcal{L}(A_1,B_1)\|^{\theta}\ \Phi_{\theta,q}\left(J(\tau,\widetilde{u}(\tau))\right)
\end{aligned}$$

mit $\widetilde{u}(\tau) := u\Big(\overbrace{\tau\ \frac{\|T|\mathcal{L}(A_0,B_0)\|}{\|T|\mathcal{L}(A_1,B_1)\|}}^{s}\Big) \quad \Longrightarrow \quad a = \int\limits_0^\infty u(s)\ \frac{\mathrm{d}s}{s} \ =\ \int\limits_0^\infty \widetilde{u}(\tau)\ \frac{\mathrm{d}\tau}{\tau}$

$$\Longrightarrow \quad \left\| Ta \,|\, (B_0,B_1)^{\mathcal{J}}_{\theta,q} \right\| \;\le\; \Phi_{\theta,q}\left(J(s,Tu(s))\right) \;\le\; \|T|\mathcal{L}(A_0,B_0)\|^{1-\theta}\ \|T|\mathcal{L}(A_1,B_1)\|^{\theta}\ \Phi_{\theta,q}\left(J(\tau,\widetilde{u}(\tau))\right)$$

$$\underset{\inf}{\Longrightarrow} \quad \left\| Ta \,|\, (B_0,B_1)^{\mathcal{J}}_{\theta,q} \right\| \;\le\; \|T|\mathcal{L}(A_0,B_0)\|^{1-\theta}\ \|T|\mathcal{L}(A_1,B_1)\|^{\theta}\ \left\| a \,|\, (A_0,A_1)^{\mathcal{J}}_{\theta,q} \right\|, \qquad a \in (A_0,A_1)^{\mathcal{J}}_{\theta,q}$$

$$\Longrightarrow \quad \left\| T|\mathcal{L}\left((A_0,A_1)^{\mathcal{J}}_{\theta,q}, (B_0,B_1)^{\mathcal{J}}_{\theta,q}\right) \right\| \;\le\; \|T|\mathcal{L}(A_0,B_0)\|^{1-\theta}\ \|T|\mathcal{L}(A_1,B_1)\|^{\theta} \qquad \square$$

__Ziel__ : $(A_0,A_1)_{\theta,q} \;=\; (A_0,A_1)^{\mathcal{J}}_{\theta,q}$; dazu Lemma notwendig

Lemma 2 (Fundamentallemma der Interpolationstheorie)
Sei $a \in A_0 + A_1$ *mit*

$$\lim_{t\to 0} K(t,a) \;=\; \lim_{t\to\infty} \frac{K(t,a)}{t} \;=\; 0\,. \tag{4}$$

Dann gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ *eine Darstellung* $a = \sum_{j=-\infty}^{\infty} u_j$ *für* a*, konvergent in* $A_0 + A_1$, $u_j \in A_0 \cap A_1$, $j \in \mathbb{Z}$*, so dass zusätzlich gilt*

$$J\left(2^j,u_j\right) \;\le\; 3(1+\varepsilon)\ K\left(2^j,a\right)\ , \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Beweis : Sei $\varepsilon > 0$ gegeben, wählen $\{a_{i,j}\}_{j=-\infty}^{\infty} \subset A_i$, $i = 0,1$, mit $a = a_{0,j} + a_{1,j}$ und

$$\|a_{0,j}|A_0\| + \ 2^j\ \|a_{1,j}|A_1\| \;\le\; (1+\varepsilon)\ K\left(2^j,a\right)\ , \quad j \in \mathbb{Z}$$

$$\underset{(4)}{\Longrightarrow} \quad \lim_{j\to-\infty} \|a_{0,j}|A_0\| \;=\; 0, \quad \lim_{j\to\infty} \|a_{1,j}|A_1\| = 0, \quad \text{setzen}$$

$$u_j := a_{0,j} - a_{0,j-1} = a_{1,j-1} - a_{1,j} \in A_0 \cap A_1\ , \quad j \in \mathbb{Z},$$

$$\Longrightarrow \quad a - \sum_{j=-m}^{k} u_j \;=\; a - \sum_{j=-m}^{k} (a_{0,j} - a_{0,j-1}) \;=\; a - \underbrace{a_{0,k}}_{a-a_{1,k}} + a_{0,-m-1} = a_{1,k} + a_{0,-m-1}$$

$$\underset{\inf}{\Longrightarrow} \quad \left\| a - \sum_{j=-m}^{k} u_j | A_0 + A_1 \right\| = K\left(1, a - \sum_{j=-m}^{k} u_j\right) \;\le\; \underbrace{\|a_{0,-m-1}|A_0\|}_{\to\ 0,m\to\infty} + \underbrace{\|a_{1,k}|A_1\|}_{\to\ 0,k\to\infty} \;\xrightarrow[k,m\to\infty]{}\; 0$$

$$\curvearrowright\ a = \sum_{j=-\infty}^{\infty} u_j \ \text{ in } A_0 + A_1; \qquad u_j = a_{0,j} - a_{0,j-1} = a_{1,j-1} - a_{1,j} \in A_0 \cap A_1,\ j \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned}
\curvearrowright\ J\left(2^j,u_j\right) \;&=\; \max\left(\|u_j|A_0\|, 2^j\,\|u_j|A_1\|\right) \\
&\le\; \max\Big(\underbrace{\|a_{0,j}|A_0\|}_{\le\ (1+\varepsilon)K(2^j,a)} + \underbrace{\|a_{0,j-1}|A_0\|}_{(1+\varepsilon)K(2^{j-1},a)},\ \underbrace{2^j\,\|a_{1,j-1}|A_1\|}_{2(1+\varepsilon)K(2^{j-1},a)} + \underbrace{2^j\ \|a_{1,j}|A_1\|}_{(1+\varepsilon)K(2^j,a)}\Big) \\
&\le\; (1+\varepsilon)\ \Big(K\left(2^j,a\right) + 2\underbrace{K\left(2^{j-1},a\right)}_{\le\ K(2^j,a),\ j\in\mathbb{Z}}\Big) \;\le\; 3(1+\varepsilon)\ K\left(2^j,a\right)
\end{aligned}$$

$\square$

Satz 2 (Äquivalenzsatz)
Seien $\{A_0,A_1\}$ *ein Interpolationspaar,* $0 < \theta < 1$ *und* $1 \le q \le \infty$*. Dann gilt*

$$(A_0,A_1)_{\theta,q} \;=\; (A_0,A_1)^{\mathcal{J}}_{\theta,q}$$

mit äquivalenten Normen.

B e w e i s : <u>1. Schritt</u> : zeigen $(A_0, A_1)^{\mathcal{J}}_{\theta,q} \hookrightarrow (A_0, A_1)_{\theta,q}$

Sei $a \in (A_0, A_1)^{\mathcal{J}}_{\theta,q} \implies \exists\, u : \mathbb{R}_+ \longrightarrow A_0 \cap A_1 \;:\; a = \int\limits_0^\infty u(t)\, \frac{\mathrm{d}t}{t}$

$$K(s,a) \;\le\; \int\limits_0^\infty \underbrace{K\left(s, u(t)\right)}_{\substack{\le \min\left(1, \frac{1}{\tau}\right) J(s\tau, u(t)) \\ \text{Lemma 1}}} \frac{\mathrm{d}t}{t} \underset{t = \tau s}{=} \underbrace{\int\limits_0^\infty \min\left(1, \frac{1}{\tau}\right) J(s\tau, u(s\tau))\, \frac{\mathrm{d}\tau}{\tau}}_{\psi(s)}, \quad s > 0$$

$$\underset{\Phi_{\theta,q}}{\implies} \underbrace{\left\| a \right| (A_0,A_1)_{\theta,q} \right\|}_{\Phi_{\theta,q}(K(\cdot,a))} \le \underbrace{\left(\int\limits_0^\infty s^{-\theta q} \Big(\underbrace{\int\limits_0^\infty \min\left(1, \frac{1}{\tau}\right) J(s\tau, u(s\tau))\, \frac{\mathrm{d}\tau}{\tau}}_{\psi(s)} \Big)^q \frac{\mathrm{d}s}{s} \right)^{\frac{1}{q}}}_{\Phi_{\theta,q}(\psi)}$$

$$= \left(\int\limits_0^\infty \left(\int\limits_0^\infty s^{-\theta} \min\left(1, \frac{1}{\tau}\right) J(s\tau, u(s\tau))\, \frac{\mathrm{d}\tau}{\tau} \right)^q \frac{\mathrm{d}s}{s} \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\underset{24}{\le} \int\limits_0^\infty \min\left(1, \frac{1}{\tau}\right) \left[\int\limits_0^\infty s^{-\theta q} J(s\tau, u(s\tau))^q\, \frac{\mathrm{d}s}{s} \right]^{\frac{1}{q}} \frac{\mathrm{d}\tau}{\tau}$$

$$\underset{t = s\tau}{=} \int\limits_0^\infty \min\left(1, \frac{1}{\tau}\right) \tau^\theta \underbrace{\left[\int\limits_0^\infty t^{-\theta q} J(t, u(t))^q\, \frac{\mathrm{d}t}{t} \right]^{\frac{1}{q}}}_{\Phi_{\theta,q}(J(t,u(t)))} \frac{\mathrm{d}\tau}{\tau}$$

$$= \Phi_{\theta,q}\left(J(t,u(t))\right) \underbrace{\left(\int\limits_0^1 \tau^\theta \frac{\mathrm{d}\tau}{\tau} + \int\limits_1^\infty \tau^{\theta - 1} \frac{\mathrm{d}\tau}{\tau} \right)}_{c_\theta} \le c\, \Phi_{\theta,q}\left(J(t,u(t))\right)$$

$$\underset{\inf}{\implies} \left\| a \right| (A_0,A_1)_{\theta,q} \right\| \le c \left\| a \right| (A_0,A_1)^{\mathcal{J}}_{\theta,q} \right\|$$

<u>2. Schritt</u> : zeigen $(A_0, A_1)_{\theta,q} \hookrightarrow (A_0, A_1)^{\mathcal{J}}_{\theta,q}$

sei $a \in (A_0, A_1)_{\theta,q} \underset{\text{Satz 4.1(iii)}}{\implies} K(t,a) \le c_{\theta,q}\, t^\theta \left\| a \right| (A_0,A_1)_{\theta,q} \right\| \underset{0<\theta<1}{\implies} \lim\limits_{t\to 0} K(t,a) = \lim\limits_{t\to\infty} \frac{K(t,a)}{t} = 0$

sei $\varepsilon > 0 \underset{\text{(4), Lemma 2}}{\implies} \exists\, u_j \in A_0 \cap A_1,\ j \in \mathbb{Z} \;:\; a = \sum\limits_{j=-\infty}^\infty u_j,\ J\left(2^j, u_j\right) \le 3(1+\varepsilon)\, K\left(2^j, a\right)$

definieren $u(t) := (\ln 2)^{-1} u_j$ für $2^j \le t < 2^{j+1}$, $j \in \mathbb{Z}$, d.h.

$$u(t) := \frac{1}{\ln 2} \sum_{j=-\infty}^\infty u_j\, \chi_{[2^j, 2^{j+1})}(t) \implies a = \sum_{j=-\infty}^\infty u_j = \sum_{j=-\infty}^\infty \int\limits_{2^j}^{2^{j+1}} u(t)\, \frac{\mathrm{d}t}{t} = \int\limits_0^\infty u(t)\, \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

$u : \mathbb{R}_+ \longrightarrow A_0 \cap A_1$, Treppenfunktion, deren Unstetigkeitspunkte sich in $(0,\infty)$ nicht häufen

[24]verallgemeinerte Dreiecksungleichung für Integrale, [HLP52, Thm. 202, p. 148]

$$\begin{aligned}\Phi_{\theta,q}\left(J(t,u(t))\right)^q &= \int_0^\infty t^{-\theta q}\, J\left(t,u(t)\right)^q\,\frac{\mathrm{d}t}{t} &&= \sum_{j=-\infty}^{\infty}\int_{2^j}^{2^{j+1}} \underbrace{t^{-\theta q}}_{\le 2^{-j\theta q}}\ \underbrace{J\left(t,u(t)\right)^q}_{\le c\ J(2^j,u_j)}\,\frac{\mathrm{d}t}{t}\\ &\le c\sum_{j=-\infty}^{\infty} 2^{-j\theta q}\ \underbrace{J\left(2^j,u_j\right)^q}_{\le\ 3(1+\varepsilon)\ K(2^j,a)} &&\le c'\ (1+\varepsilon)^q\sum_{j=-\infty}^{\infty}2^{-j\theta q}\ K\left(2^j,a\right)^q\\ &\le C(1+\varepsilon)^q\int_0^\infty t^{-\theta q}\ K\left(t,a\right)^q\ \frac{\mathrm{d}t}{t} &&= C(1+\varepsilon)^q \left\|a|\left(A_0,A_1\right)_{\theta,q}\right\|^q\end{aligned}$$

$$\underset{\inf}{\Longrightarrow}\ \left\|a|\left(A_0,A_1\right)^{\mathcal{J}}_{\theta,q}\right\| \le c(1+\varepsilon)\left\|a|\left(A_0,A_1\right)_{\theta,q}\right\| \ \underset{\varepsilon\downarrow 0}{\Longrightarrow}\ \left\|a|\left(A_0,A_1\right)^{\mathcal{J}}_{\theta,q}\right\| \le c\left\|a|\left(A_0,A_1\right)_{\theta,q}\right\| \qquad \square$$

Bemerkung :

- Satz 4.1 (i) $\dashrightarrow$ $(A_0,A_1)_{\theta,q} = (A_0,A_1)^{\mathcal{J}}_{\theta,q}$ Interpolationsraum $\dashrightarrow$ Satz 1 (i)
- *ab jetzt* : $(A_0,A_1)_{\theta,q}$ statt $(A_0,A_1)^{\mathcal{J}}_{\theta,q}$

Diskretisierung

Folgenräume $\lambda^{\theta,q}$: Erweiterung von $\ell_q^{-\theta}(\mathbb{C})$ aus Definition 5.1, $0<\theta<1$, $1\le q\le\infty$, d.h.

$$\{a_k\}_{k=-\infty}^{\infty}\in\lambda^{\theta,q} \iff \left\|\{a_k\}_k|\lambda^{\theta,q}\right\| := \left\{\begin{array}{ll}\left(\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}2^{-k\theta q}\ |a_k|^q\right)^{\frac1q} & ,\quad q<\infty\\ \sup\limits_{k\in\mathbb{Z}} 2^{-k\theta}\ |a_k| & ,\quad q=\infty\end{array}\right\} < \infty ,$$

$a_k\in\mathbb{C}$, $k\in\mathbb{Z}$

Satz 3 *Seien* $\{A_0,A_1\}$ *ein Interpolationspaar,* $0<\theta<1$ *und* $1\le q\le\infty$.

(i) $a\in(A_0,A_1)_{\theta,q}$ *genau dann, wenn* $\left\{K\left(2^k,a\right)\right\}_{k=-\infty}^{\infty}\in\lambda^{\theta,q}$*; es gilt*

$$2^{-\theta}\ (\ln 2)^{\frac1q}\ \left\|\left\{K\left(2^k,a\right)\right\}_k|\lambda^{\theta,q}\right\| \le \left\|a|\left(A_0,A_1\right)_{\theta,q}\right\| \le 2\ (\ln 2)^{\frac1q}\ \left\|\left\{K\left(2^k,a\right)\right\}_k|\lambda^{\theta,q}\right\|.$$

(ii) $a\in(A_0,A_1)_{\theta,q}$ *genau dann, wenn eine Folge* $\{u_j\}_{j=-\infty}^{\infty}\subset A_0\cap A_1$ *existiert, so dass* $a=\sum\limits_{j=-\infty}^{\infty}u_j$ *in* A_0+A_1 *und* $\left\{J\left(2^j,u_j\right)\right\}_{j=-\infty}^{\infty}\in\lambda^{\theta,q}$ *sind; es gilt*

$$\left\|a|\left(A_0,A_1\right)_{\theta,q}\right\| \sim \inf_{a=\sum\limits_{j=-\infty}^{\infty}u_j}\left\|\left\{J\left(2^j,u_j\right)\right\}_j|\lambda^{\theta,q}\right\|.$$

B e w e i s : <u>1. Schritt</u> : zu (i), o.B.d.A. $q<\infty$, $\left\|a|\left(A_0,A_1\right)_{\theta,q}\right\| = \left(\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\int_{2^k}^{2^{k+1}} t^{-\theta q}\ K(t,a)^q\ \frac{\mathrm{d}t}{t}\right)^{\frac1q}$

$$2^k\le t\le 2^{k+1},\ k\in\mathbb{Z}\ \underset{\text{Lemma 4.1}}{\Longrightarrow}\ K\left(2^k,a\right) \le K(t,a) \le K\left(2^{k+1},a\right) \le 2\ K\left(2^k,a\right)$$

$$\Longrightarrow \quad 2^{-\theta(k+1)}\, K\left(2^k,a\right) \;\le\; t^{-\theta}\, K(t,a) \;\le\; 2\, 2^{-\theta k}\, K\left(2^k,a\right)$$

$$\Longrightarrow \quad \left\| a \right| (A_0,A_1)_{\theta,q} \Big\|^q \le \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^q\, 2^{-\theta k q}\, K\left(2^k,a\right)^q \underbrace{\int_{2^k}^{2^{k+1}} \frac{\mathrm{d}t}{t}}_{\ln 2} = 2^q \ln 2 \, \left\| \left\{K\left(2^k,a\right)\right\}_k |\lambda^{\theta,q} \right\|^q$$

$$\left\| a \right| (A_0,A_1)_{\theta,q} \Big\|^q \ge \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{-\theta q}\, 2^{-\theta k q}\, K\left(2^k,a\right)^q \overbrace{\int_{2^k}^{2^{k+1}} \frac{\mathrm{d}t}{t}} = 2^{-\theta q} \ln 2 \, \left\| \left\{K\left(2^k,a\right)\right\}_k |\lambda^{\theta,q} \right\|^q$$

<u>2. Schritt</u> : zu (ii), $\boxed{\Longrightarrow}$

sei $a \in (A_0,A_1)_{\theta,q} \underset{\mathcal{J}}{\Longrightarrow} \exists\, u : \mathbb{R}^1_+ \longrightarrow A_0 \cap A_1$ stetig mit $a = \int_0^\infty u(t)\, \frac{\mathrm{d}t}{t}$, $\Phi_{\theta,q}\left(J(t,u(t))\right) < \infty$

$$u_j := \int_{2^j}^{2^{j+1}} u(t)\, \frac{\mathrm{d}t}{t}\,, \quad j \in \mathbb{Z} \quad \Longrightarrow \quad u_j \in A_0 \cap A_1, \quad \sum_{j=-\infty}^{\infty} u_j = \int_0^\infty u(t)\, \frac{\mathrm{d}t}{t} = a$$

$$\begin{aligned}
\left\| \left\{J\left(2^j,u_j\right)\right\}_j |\lambda^{\theta,q} \right\|^q &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} 2^{-j\theta q} \underbrace{J\left(2^j,u_j\right)^q}_{\le \left(\int_{2^j}^{2^{j+1}} J(2^j,u(t))\frac{\mathrm{d}t}{t}\right)^q \le c_q \int_{2^j}^{2^{j+1}} J(2^j,u(t))^q \frac{\mathrm{d}t}{t}} \\
&\le c \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_{2^j}^{2^{j+1}} \underbrace{2^{-j\theta q}}_{\le t^{-\theta q}} \underbrace{J\left(2^j,u(t)\right)^q}_{\le \max(1,2^j/t) J(t,u(t)) = J(t,u(t))} \frac{\mathrm{d}t}{t} \\
&\le c' \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_{2^j}^{2^{j+1}} t^{-\theta q}\, J\left(t,u(t)\right)^q \frac{\mathrm{d}t}{t} = c'\, \Phi^q_{\theta,q}\left(J(t,u(t))\right) < \infty
\end{aligned}$$

$$\underset{\inf}{\Longrightarrow} \quad \inf_{a=\sum_{j=-\infty}^{\infty} u_j} \left\| \left\{J\left(2^j,u_j\right)\right\}_j |\lambda^{\theta,q} \right\| \le c \left\| a \right| (A_0,A_1)^{\mathcal{J}}_{\theta,q} \Big\| \le c' \left\| a \right| (A_0,A_1)_{\theta,q} \Big\|$$

$\boxed{\Longleftarrow}$ sei $a = \sum_{j=-\infty}^{\infty} u_j$ in $A_0 + A_1$, $u_j \in A_0 \cap A_1$, $j \in \mathbb{Z}$, mit $\left\{J\left(2^j,u_j\right)\right\}_{j=-\infty}^{\infty} \in \lambda^{\theta,q}$

analog zu 2. Beweisschritt, Satz 2 : definieren Treppenfunktion $u : \mathbb{R}_+ \longrightarrow A_0 \cap A_1$ durch

$$u(t) := \frac{1}{\ln 2} \sum_{j=-\infty}^{\infty} u_j\, \chi_{[2^j,2^{j+1})}(t) \quad \Longrightarrow \quad a = \sum_{j=-\infty}^{\infty} u_j = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_{2^j}^{2^{j+1}} u(t)\, \frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_0^\infty u(t)\, \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

--→ Unstetigkeitspunkte von u häufen sich nicht in $(0,\infty)$,

$$\begin{aligned}
\Phi_{\theta,q}\left(J(t,u(t))\right)^q &= \int_0^\infty t^{-\theta q}\, J\left(t,u(t)\right)^q \frac{\mathrm{d}t}{t} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_{2^j}^{2^{j+1}} \underbrace{t^{-\theta q}}_{\le 2^{-j\theta q}} \underbrace{J\left(t,u(t)\right)^q}_{\le c\; J(2^j,u_j)} \frac{\mathrm{d}t}{t} \\
&\le c \sum_{j=-\infty}^{\infty} 2^{-j\theta q}\, J\left(2^j,u_j\right)^q = \left\| \left\{J\left(2^j,u_j\right)\right\}_j |\lambda^{\theta,q} \right\|^q < \infty \quad \underset{\text{Bem.}}{\Longrightarrow} \quad a \in (A_0,A_1)^{(\mathcal{J})}_{\theta,q}
\end{aligned}$$

$$\underset{\inf}{\Longrightarrow} \quad \left\| a \right| (A_0,A_1)_{\theta,q} \Big\| \le c \left\| a \right| (A_0,A_1)^{\mathcal{J}}_{\theta,q} \Big\| \le c' \inf_{a=\sum_{j=-\infty}^{\infty} u_j} \left\| \left\{J\left(2^j,u_j\right)\right\}_j |\lambda^{\theta,q} \right\| \qquad \square$$

Bemerkung :

- Peetre, Lions (1964), Butzer, Scherer, Westphal (1968, 1971) $\dashrightarrow$ Approximationstheorie
- bei entsprechender Modifikation von $\lambda^{\theta,q}$ kann '2' durch beliebiges $b > 0,\ b \neq 1,$ ersetzt werden

Bezeichnungen : $\mathring{A}_j := \overline{A_0 \cap A_1}^{\|\cdot|A_j\|}$ ... Abschluss von $A_0 \cap A_1$ in $\|\cdot|A_j\|$, $j = 0, 1$

$\mathring{A}_{\theta,\infty} := \overline{A_0 \cap A_1}^{\|\cdot|(A_0,A_1)_{\theta,\infty}\|}$ ... Abschluss von $A_0 \cap A_1$ in $\|\cdot|(A_0, A_1)_{\theta,\infty}\|$

Satz 4 *Seien* $\{A_0, A_1\}$ *ein Interpolationspaar,* $0 < \theta < 1$ *und* $1 \le q < \infty$.

(i) $A_0 \cap A_1$ *ist dicht in* $(A_0, A_1)_{\theta,q}$.

(ii) *Es gilt*

$$(A_0, A_1)_{\theta,q} = \left(\mathring{A}_0, A_1\right)_{\theta,q} = \left(A_0, \mathring{A}_1\right)_{\theta,q} = \left(\mathring{A}_0, \mathring{A}_1\right)_{\theta,q} .$$

(iii) *Sei* $a \in A_0 + A_1$*, dann gilt*

$$a \in \mathring{A}_{\theta,\infty} \iff \lim_{t\to 0} t^{-\theta} K(t,a) = \lim_{t\to\infty} t^{-\theta} K(t,a) = 0 .$$

Beweis : $\boxed{\text{zu (i)}}$: sei $a \in (A_0, A_1)_{\theta,q}$

$$\underset{\text{Satz 3 (ii)}}{\Longrightarrow} \exists\ \{u_j\}_{j=-\infty}^{\infty} \subset A_0 \cap A_1 : a = \sum_{j=-\infty}^{\infty} u_j, \quad \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} 2^{-j\theta q}\, J\left(2^j, u_j\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} < \infty$$

$$\Longrightarrow \left\| a - \underbrace{\sum_{j=-m}^{m} u_j}_{\in A_0\cap A_1} \,|\, (A_0, A_1)_{\theta,q} \right\| \le \left(\sum_{|j|>m} 2^{-j\theta q}\, J\left(2^j, u_j\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$$

$\boxed{\text{zu (ii)}}$: es gilt $A_0 \cap A_1 = \overline{A_0 \cap A_1}^{\|\cdot|A_0\cap A_1\|} \hookrightarrow \overline{A_0 \cap A_1}^{\|\cdot|A_j\|} = \mathring{A}_j \hookrightarrow \overline{A_j}^{\|\cdot|A_j\|} = A_j$, $j = 0, 1$

$$\underset{\text{Lemma 4.2}}{\Longrightarrow} \underbrace{(A_0 \cap A_1, A_0 \cap A_1)_{\theta,q}}_{\underset{\text{Satz 4.2 (iv)}}{=}\ \overline{A_0 \cap A_1}^{\|\cdot|(A_0,A_1)_{\theta,q}\|}\ \underset{\text{(i)}}{=}\ (A_0,A_1)_{\theta,q}} \hookrightarrow \left(\mathring{A}_0, \mathring{A}_1\right)_{\theta,q} \hookrightarrow \left\{ \begin{matrix} \left(\mathring{A}_0, A_1\right)_{\theta,q} \\ \left(A_0, \mathring{A}_1\right)_{\theta,q} \end{matrix} \right\} \hookrightarrow (A_0, A_1)_{\theta,q}$$

$\boxed{\text{zu (iii)}}$: zeigen $\boxed{\Longrightarrow}$

seien $a \in \mathring{A}_{\theta,\infty} = \overline{A_0 \cap A_1}^{\|\cdot|(A_0,A_1)_{\theta,\infty}\|}$, $\varepsilon > 0 \quad \Longrightarrow \quad \exists\ u \in A_0 \cap A_1 : \|a - u|(A_0, A_1)_{\theta,\infty}\| < \varepsilon$

$$\Longrightarrow K(t,a) \le \underbrace{K(t, a-u)}_{\underset{\text{Satz 4.1 (iii)}}{\le}\ ct^{\theta}\, \|a-u|(A_0,A_1)_{\theta,\infty}\|} + \underbrace{K(t,u)}_{\underset{\text{Lemma 1, (1)}}{\le}\ \min(1,t) J(1,u)} < c\,\varepsilon\, t^{\theta} + \min(1,t)\ J(1,u)$$

$$\Longrightarrow \lim_{t\to 0} t^{-\theta} K(t,a) \le c\,\varepsilon + J(1,u) \underbrace{\lim_{t\to 0} t^{1-\theta}}_{0} = c\,\varepsilon, \qquad \lim_{t\to\infty} t^{-\theta} K(t,a) \le c\,\varepsilon + J(1,u) \underbrace{\lim_{t\to\infty} t^{-\theta}}_{0} = c\,\varepsilon$$

für beliebige $\varepsilon > 0 \quad \Longrightarrow \quad \lim\limits_{t\to 0} t^{-\theta}\, K(t,a) \;=\; \lim\limits_{t\to\infty} t^{-\theta}\, K(t,a) \;=\; 0$

$\boxed{\Longleftarrow}$ sei umgekehrt $a \in A_0 + A_1$ mit $\lim\limits_{t\to 0} t^{-\theta}\, K(t,a) \;=\; \lim\limits_{t\to\infty} t^{-\theta}\, K(t,a) \;=\; 0$

$\Longrightarrow \quad \lim\limits_{t\to 0} K(t,a) \;=\; \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{K(t,a)}{t} \;=\; 0;$ sei $\varepsilon > 0 \underset{\text{Lemma 2}}{\Longrightarrow} \exists\, \{u_j\}_{j=-\infty}^{\infty} \subset A_0 \cap A_1$:

$$a = \sum_{j=-\infty}^{\infty} u_j \;, \quad J\left(2^j, u_j\right) \;\le\; 3(1+\varepsilon)\; K\left(2^j, a\right) \;, \quad j \in \mathbb{Z}$$

$$\Longrightarrow \quad \Big\| \underbrace{a - \sum_{j=-m}^{m} u_j}_{\in A_0\cap A_1} \mid (A_0,A_1)_{\theta,\infty} \Big\| \;\le\; \sup_{|j|>m} 2^{-j\theta}\, J\left(2^j, u_j\right) \;\le\; 3(1+\varepsilon) \sup_{|j|>m} 2^{-j\theta}\, K\left(2^j, a\right) \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$$

$$\Longrightarrow \quad a \in \overline{A_0 \cap A_1}^{\|\cdot|(A_0,A_1)_{\theta,\infty}\|} \;=\; \mathring{A}_{\theta,\infty} \qquad \square$$

Bemerkung :

- Einschränkung $q < \infty$ wesentlich in (i), (ii), i.a. $A_0 \cap A_1$ nicht dicht in $(A_0, A_1)_{\theta,\infty}$, z.B. $A_0 = \ell_1,\;\; A_1 = \ell_\infty$

  $\curvearrowright\; A_0 \;\cap\; A_1 = \ell_1,$ Satz 5.2 $\curvearrowright\; (A_0,A_1)_{\theta,\infty} = (\ell_1, \ell_\infty)_{\theta,\infty} = \ell_{\frac{1}{1-\theta},\infty}$

  in $\ell_1 = A_0 \;\cap\; A_1$ dicht: "endliche Folgen"[25], aber nicht dicht in $\ell_{r,\infty}$ für $r \le \infty$

- zu <u>Dualität</u> (*nicht innerhalb der Vorlesung*), siehe z.B. [BL76, Thm. 2.7.1, 3.7.1]

  – $A_0 \cap A_1$ dicht in $A_0, A_1 \;\curvearrowright\; \left[A_0 \cap A_1\right]' = A_0' + A_1', \quad \left[A_0 + A_1\right]' = A_0' \cap A_1'$

  – $A_0 \cap A_1$ dicht in $A_0, A_1,\;\; 0 < \theta < 1,\;\; 1 \le q < \infty$ mit $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$

  $$\curvearrowright\; \left[(A_0,A_1)_{\theta,q}\right]' \;=\; (A_0', A_1')_{\theta,q'} \qquad \text{(im Sinne äquivalenter Normen)}$$

  man zeigt :

  $$\left[(A_0,A_1)_{\theta,q}^{\mathcal{J}}\right]' \;\hookrightarrow\; (A_1', A_0')_{1-\theta,q'} \;\;,\quad (A_1', A_0')_{1-\theta,q'}^{\mathcal{J}} \;\hookrightarrow\; \left[(A_0,A_1)_{\theta,q}\right]'$$

  $$\underset{\text{Satz 2}}{\Longrightarrow} \;\left[(A_0,A_1)_{\theta,q}\right]' \;=\; (A_1', A_0')_{1-\theta,q'} \underset{\text{Satz 4.2 (i)}}{=} (A_0', A_1')_{\theta,q'}$$

---

[25] $\xi = \{\xi_j\}_j$ mit $\xi_j \in \mathbb{C}$ und $\xi \in \bigcup_{m\in\mathbb{N}_0} \{\eta \in \ell_\infty : \#\{j : \eta_j \neq 0\} = m\}$

7 Der Reiterationssatz

Definition 1 *Seien* $\{A_0, A_1\}$ *ein Interpolationspaar,* E *ein Banachraum mit* $A_0 \cap A_1 \hookrightarrow E \hookrightarrow A_0 + A_1$, *und* $0 \leq \theta \leq 1$.

(i) E *gehört zur Klasse* $\mathcal{K}(\theta; A_0, A_1)$, *falls ein* $c > 0$ *existiert, so dass für alle* $a \in E$ *und alle* t, $0 < t < \infty$, *gilt*

$$K(t, a; A_0, A_1) \leq c\, t^\theta \, \|a|E\| \ .$$

(ii) E *gehört zur Klasse* $\mathcal{J}(\theta; A_0, A_1)$, *falls ein* $c > 0$ *existiert, so dass für alle* $a \in A_0 \cap A_1$ *und alle* t, $0 < t < \infty$, *gilt*

$$\|a|E\| \leq c\, t^{-\theta} \, J(t, a; A_0, A_1) \ .$$

Bemerkung :

- Definition 3.3 (i) $\dashrightarrow$ E intermediärer Raum bezüglich $\{A_0, A_1\}$
- $\{A_0, A_1\}$ fixiert $\dashrightarrow$ $\mathcal{K}(\theta)$ statt $\mathcal{K}(\theta; A_0, A_1)$
- $\{A_0, A_1\}$ Interpolationspaar
$$\begin{aligned} &\underset{\text{Satz 4.1 (iii)}}{\Longrightarrow} && (A_0, A_1)_{\theta,q} \in \mathcal{K}(\theta) \\ &\underset{\text{Satz 6.1 (iii)}}{\Longrightarrow} && (A_0, A_1)^{\mathcal{J}}_{\theta,q} \in \mathcal{J}(\theta) \\ &\underset{\text{Satz 6.2}}{\Longrightarrow} && (A_0, A_1)_{\theta,q} \in \mathcal{K}(\theta) \cap \mathcal{J}(\theta) \end{aligned}$$
$$0 < \theta < 1,\ 1 \leq q \leq \infty$$
- $$\begin{array}{lllllll} a \in A_0 & \Longrightarrow & K(t,a) & \leq & \|a|A_0\| \leq J(t,a) & \Longrightarrow & A_0 \in \mathcal{K}(0) \cap \mathcal{J}(0) \\ a \in A_1 & \Longrightarrow & K(t,a) & \leq & t\,\|a|A_1\| \leq J(t,a) & \Longrightarrow & A_1 \in \mathcal{K}(1) \cap \mathcal{J}(1) \end{array}$$

Satz 1 *Seien* $\{A_0, A_1\}$ *ein Interpolationspaar,* E *ein Banachraum mit* $A_0 \cap A_1 \hookrightarrow E \hookrightarrow A_0 + A_1$, *und* $0 < \theta < 1$.

(a) *Folgende Aussagen sind äquivalent :*

(i) $E \in \mathcal{K}(\theta; A_0, A_1)$

(ii) $A_0 \cap A_1 \hookrightarrow E \hookrightarrow (A_0, A_1)_{\theta,\infty}$

(b) *Folgende Aussagen sind äquivalent :*

(i) $E \in \mathcal{J}(\theta; A_0, A_1)$

(ii) $(A_0, A_1)_{\theta,1} \hookrightarrow E \hookrightarrow A_0 + A_1$

(iii) *Es existiert ein* $c > 0$, *so dass für alle* $a \in A_0 \cap A_1$ *gilt*

$$\|a|E\| \leq c\ \|a|A_0\|^{1-\theta}\, \|a|A_1\|^\theta \ .$$

Beweis : $\{A_0, A_1\}$ fixiert, $\dashrightarrow$ $\mathcal{K}(\theta; A_0, A_1) = \mathcal{K}(\theta)$, $\mathcal{J}(\theta; A_0, A_1) = \mathcal{J}(\theta)$

1. Schritt : $\boxed{\text{zu (a)}}$

$$\underbrace{E \in \mathcal{K}(\theta)}_{\text{(i)}} \underset{\text{Def. 1 (i)}}{\Longleftrightarrow} A_0 \cap A_1 \hookrightarrow E,\ \underbrace{\sup_{t>0}\ t^{-\theta}\, K(t,a)}_{\|a|(A_0,A_1)_{\theta,\infty}\|} \leq c\,\|a|E\| \Longleftrightarrow \underbrace{A_0 \cap A_1 \hookrightarrow E \hookrightarrow (A_0, A_1)_{\theta,\infty}}_{\text{(ii)}}$$

<u>2. Schritt</u> : zu (b), sei $a \in (A_0, A_1)_{\theta,1} \underset{\text{Satz 6.3 (ii)}}{\iff} \exists\ \{u_j\}_{j=-\infty}^{\infty} \subset A_0 \cap A_1,\ a = \sum_{j=-\infty}^{\infty} u_j$, und

$$\left\| a | (A_0, A_1)_{\theta,1} \right\| \sim \inf_{a=\sum_{j=-\infty}^{\infty} u_j} \underbrace{\sum_{j=-\infty}^{\infty} 2^{-j\theta}\, J\left(2^j, u_j\right)}_{\left\|\{J(2^j,u_j)\}_j | \lambda^{\theta,1}\right\|}$$

$\boxed{\text{(i)} \Rightarrow \text{(ii)}}$:

$$\underbrace{E \in \mathcal{J}(\theta)}_{\text{(i)}} \underset{\text{Def. 1 (ii)}}{\iff} E \hookrightarrow A_0 + A_1, \quad \|u_j|E\| \le c\, 2^{-j\theta} J\left(2^j, u_j\right), \ j \in \mathbb{Z}$$

$$\underset{a=\sum_{j=-\infty}^{\infty} u_j}{\Longrightarrow} E \hookrightarrow A_0 + A_1, \quad \|a|E\| \le \sum_{j=-\infty}^{\infty} \|u_j|E\| \le c \sum_{j=-\infty}^{\infty} 2^{-j\theta} J\left(2^j, u_j\right) < \infty$$

$$\underset{\inf}{\Longrightarrow} E \hookrightarrow A_0 + A_1, \quad \|a|E\| \le c \underbrace{\inf_{a=\sum_{j=-\infty}^{\infty} u_j} \sum_{j=-\infty}^{\infty} 2^{-j\theta} J\left(2^j, u_j\right)}_{\left\|a|(A_0,A_1)_{\theta,1}\right\|}$$

$$\Longrightarrow \underbrace{(A_0, A_1)_{\theta,1} \hookrightarrow E \hookrightarrow A_0 + A_1}_{\text{(ii)}}$$

$\boxed{\text{(ii)} \Rightarrow \text{(i)}}$: sei $a \in A_0 \cap A_1 \quad \Longrightarrow \quad a = \sum_{j=-\infty}^{\infty} u_j^{(m)}$ mit $u_j^{(m)} := \left\{ \begin{array}{ccc} a & , & j = m \\ 0 & , & j \neq m \end{array} \right\},\ m \in \mathbb{Z}$

$$\underbrace{(A_0, A_1)_{\theta,1} \hookrightarrow E}_{\text{(ii)}} \Longrightarrow \|a|E\| \le c \left\| a | (A_0, A_1)_{\theta,1} \right\|, \quad a \in A_0 \cap A_1 \hookrightarrow E$$

$$\underset{\text{Satz 6.3 (ii)}}{\le} c \inf_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{j=-\infty}^{\infty} 2^{-j\theta} \underbrace{J\left(2^j, u_j^{(m)}\right)}_{0, j \neq m}$$

$$= c \inf_{m \in \mathbb{Z}} 2^{-m\theta} \underbrace{J\left(2^m, a\right)}_{\le \max(1, t^{-1} 2^m) J(t,a), \text{ Lemma 6.1}}$$

$$\le c \underbrace{\inf_{m \in \mathbb{Z}} \underbrace{\max\left[\left(2^{-m}\ t\right)^{\theta},\ \left(2^{-m}\ t\right)^{\theta-1}\right]}_{\le (2^{-m}\ t)^{\theta-1} \ \le\ 2^{1-\theta},\ 2^{m-1} \le t \le 2^m}}_{\le 2^{1-\theta}} t^{-\theta}\ J(t,a) \underset{\text{Def. 1 (ii)}}{\Longrightarrow} \underbrace{E \in \mathcal{J}(\theta)}_{\text{(i)}}$$

$\boxed{\text{(i)} \Rightarrow \text{(iii)}}$: sei $a \in A_0 \cap A_1,\ a \neq 0,\ \tau := \dfrac{\|a|A_0\|}{\|a|A_1\|}$

$$\underbrace{E \in \mathcal{J}(\theta)}_{\text{(i)}} \underset{\text{Def. 1 (ii)}}{\Longrightarrow} \|a|E\| \le c\, \tau^{-\theta} \underbrace{\max\left(\|a|A_0\|, \tau \|a|A_1\|\right)}_{J(\tau,a)}$$

$$\Longrightarrow \|a|E\| \le c \max\left(\|a|A_0\|^{1-\theta} \|a|A_1\|^{\theta}, \|a|A_0\|^{1-\theta} \|a|A_1\|^{\theta} \right)$$

$$\Longrightarrow \underbrace{\|a|E\| \le c\ \|a|A_0\|^{1-\theta}\ \|a|A_1\|^{\theta}\ , \quad a \in A_0 \cap A_1}_{\text{(iii)}}$$

$\boxed{\text{(iii)} \Rightarrow \text{(i)}}$: sei $a \in A_0 \cap A_1$

$$\|a|E\| \underset{\text{(iii)}}{\le} c\, t^{-\theta} \underbrace{\|a|A_0\|^{1-\theta} \left(t \|a|A_1\|\right)^{\theta}}_{\le\ \max(\|a|A_0\|, t\ \|a|A_1\|)\ =\ J(t,a)} \le c\ t^{-\theta}\ J(t,a)\ ,\ a \in A_0 \cap A_1 \underset{\text{Def. 1 (ii)}}{\Longrightarrow} E \in \mathcal{J}(\theta) \qquad \square$$

Satz 2 (Reiterationssatz)
Seien $\{A_0, A_1\}$, $\{E_0, E_1\}$ *Interpolationspaare,* $0 \le \theta_0 < \theta_1 \le 1$, $E_j \in \mathcal{K}(\theta_j; A_0, A_1) \cap \mathcal{J}(\theta_j; A_0, A_1)$, $j = 0, 1$, *sowie* $1 \le q \le \infty$, $0 < \eta < 1$ *und*

$$\theta := (1 - \eta)\, \theta_0 + \eta\, \theta_1 \, .$$

Dann gilt

$$(E_0, E_1)_{\eta,q} \;=\; (A_0, A_1)_{\theta,q}$$

im Sinne äquivalenter Normen. Insbesondere ist für beliebige $1 \le q_0, q_1 \le \infty$

$$\Big((A_0, A_1)_{\theta_0,q_0} \;,\; (A_0, A_1)_{\theta_1,q_1} \Big)_{\eta,q} \;=\; (A_0, A_1)_{\theta,q} \; . \tag{1}$$

Beweis : 1. Schritt : zeigen $E_j \in \mathcal{K}(\theta_j; A_0, A_1) \implies (E_0, E_1)_{\eta,q} \hookrightarrow (A_0, A_1)_{\theta,q}$

sei $a \in (E_0, E_1)_{\eta,q} \hookrightarrow E_0 + E_1 \hookrightarrow A_0 + A_1$, $a = e_0 + e_1$, $e_j \in E_j$

$$\begin{aligned}
\implies \quad K(t, a; A_0, A_1) \;&\le\; \underbrace{K(t, e_0; A_0, A_1)}_{\le c_0\; t^{\theta_0} \|e_0|E_0\|,\ \text{Def. 1 (i)}} + \underbrace{K(t, e_1; A_0, A_1)}_{\le c_1\; t^{\theta_1} \|e_1|E_1\|,\ \text{Def. 1 (i)}} \\
&\le\; c\, t^{\theta_0} \left(\|e_0|E_0\| + t^{\theta_1 - \theta_0} \|e_1|E_1\| \right) \\
\underset{\inf}{\implies} \quad K(t, a; A_0, A_1) \;&\le\; c'\; t^{\theta_0}\; K\left(t^{\theta_1-\theta_0}, a; E_0, E_1\right) \\
\implies \quad \left\| a |\, (A_0, A_1)_{\theta,q} \right\| \;&=\; \left(\int_0^\infty t^{-\theta q}\; K(t, a; A_0, A_1)^q \, \frac{\mathrm{d}t}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\le\; c \left(\int_0^\infty t^{(\theta_0-\theta)q}\; K\left(t^{\theta_1-\theta_0}, a; E_0, E_1\right)^q \frac{\mathrm{d}t}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \\
\underset{\substack{t^{\theta_1-\theta_0} =: s \\ \theta_0 < \theta_1}}{=} \quad & c' \left(\int_0^\infty s^{-\frac{\theta-\theta_0}{\theta_1-\theta_0} q} K(s, a; E_0, E_1)^q \, \frac{\mathrm{d}s}{s} \right)^{\frac{1}{q}} \\
\underset{\theta-\theta_0 = (\theta_1-\theta_0)\,\eta}{=} \quad & c' \left(\int_0^\infty s^{-\eta q}\; K(s, a; E_0, E_1)^q \, \frac{\mathrm{d}s}{s} \right)^{\frac{1}{q}} \;=\; c' \left\| a |\, (E_0, E_1)_{\eta,q} \right\|
\end{aligned}$$

2. Schritt : zeigen $E_j \in \mathcal{J}(\theta_j; A_0, A_1) \implies (A_0, A_1)_{\theta,q} \hookrightarrow (E_0, E_1)_{\eta,q}$

sei $a \in (A_0, A_1)^{(\mathcal{J})}_{\theta,q} \implies \exists\, u : \mathbb{R}_+ \longrightarrow A_0 \cap A_1 \;:\; a = \int_0^\infty u(s) \frac{\mathrm{d}s}{s}$

$$\begin{aligned}
\implies \quad t^{\theta_0}\, K\left(t^{\theta_1-\theta_0}, a; E_0, E_1\right) \;&\le\; \int_0^\infty t^{\theta_0}\; \underbrace{K\left(t^{\theta_1-\theta_0}, u(s); E_0, E_1\right)}_{\le\, \min\left(1, \left(\frac{t}{s}\right)^{\theta_1-\theta_0}\right) J\left(s^{\theta_1-\theta_0}, u(s); E_0, E_1\right)} \frac{\mathrm{d}s}{s} \\
&\le\; \int_0^\infty t^{\theta_0}\; \min\left(1, \left(\frac{t}{s}\right)^{\theta_1-\theta_0}\right) J\left(s^{\theta_1-\theta_0}, u(s); E_0, E_1\right) \frac{\mathrm{d}s}{s}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
J\left(s^{\theta_1-\theta_0}, u(s); E_0, E_1\right) \underset{\substack{E_j \in \mathcal{J}(\theta_j;\, A_0, A_1) \\ \text{Def. 1 (ii)}}}{=} & \max\Big(\underbrace{\|u(s)|E_0\|}_{\leq c_0 \; s^{-\theta_0} \; J(s,u(s);A_0,A_1)} \;,\; s^{\theta_1-\theta_0} \underbrace{\|u(s)|E_1\|}_{\leq c_1 \; s^{-\theta_1} J(s,u(s);A_0,A_1)} \Big) \\
\leq \; & c \; \max\left(s^{-\theta_0} \; J\left(s, u(s); A_0, A_1\right), \; s^{\theta_1-\theta_0-\theta_1} J\left(s, u(s); A_0, A_1\right)\right) \\
= \; & c \; s^{-\theta_0} \; J\left(s, u(s); A_0, A_1\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad t^{\theta_0} \; K\left(t^{\theta_1-\theta_0}, a; E_0, E_1\right) \; \leq \; & c \int_0^\infty t^{\theta_0} \; \min\left(1, \left(\frac{t}{s}\right)^{\theta_1-\theta_0}\right) s^{-\theta_0} \; J\left(s, u(s); A_0, A_1\right) \frac{\mathrm{d}s}{s} \\
= \; & c \int_0^\infty \min\left(\left(\frac{t}{s}\right)^{\theta_0}, \left(\frac{t}{s}\right)^{\theta_1}\right) J\left(s, u(s); A_0, A_1\right) \frac{\mathrm{d}s}{s} \\
\underset{s\,=\,t\tau}{=} \; & c \int_0^\infty \min\left(\tau^{-\theta_0}, \tau^{-\theta_1}\right) J\left(t\tau, u(t\tau); A_0, A_1\right) \frac{\mathrm{d}\tau}{\tau}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad \left\| a \middle| \left(E_0, E_1\right)_{\eta,q} \right\| \; = \; & \left(\int_0^\infty s^{-\eta q} \; K\left(s, a; E_0, E_1\right)^q \; \frac{\mathrm{d}s}{s}\right)^{\frac{1}{q}} \\
\underset{\substack{t^{\theta_1-\theta_0} \,:=\, s, \;\; \theta_0 < \theta_1 \\ \theta - \theta_0 \,=\, (\theta_1 - \theta_0)\,\eta}}{=} \; & c \left(\int_0^\infty t^{-\theta q} \; \underbrace{t^{\theta_0 q} \; K\left(t^{\theta_1-\theta_0}, a; E_0, E_1\right)^q} \frac{\mathrm{d}t}{t}\right)^{\frac{1}{q}} \\
\leq \; & c' \left(\int_0^\infty t^{-\theta q} \left(\int_0^\infty \min\left(\tau^{-\theta_0}, \tau^{-\theta_1}\right) J\left(t\tau, u(t\tau); A_0, A_1\right) \frac{\mathrm{d}\tau}{\tau}\right)^q \frac{\mathrm{d}t}{t}\right)^{\frac{1}{q}} \\
\underset{26}{\leq} \; & c' \int_0^\infty \min\left(\tau^{-\theta_0}, \tau^{-\theta_1}\right) \left(\int_0^\infty t^{-\theta q} \; J\left(t\tau, u(t\tau); A_0, A_1\right)^q \; \frac{\mathrm{d}t}{t}\right)^{\frac{1}{q}} \frac{\mathrm{d}\tau}{\tau} \\
\underset{s\,=\,t\tau}{=} \; & c' \int_0^\infty \min\left(\tau^{-\theta_0}, \tau^{-\theta_1}\right) \tau^{\theta} \underbrace{\left(\int_0^\infty s^{-\theta q} \; J\left(s, u(s); A_0, A_1\right)^q \; \frac{\mathrm{d}s}{s}\right)^{\frac{1}{q}}}_{\Phi_{\theta,q}(J(s,u(s);A_0,A_1))} \frac{\mathrm{d}\tau}{\tau} \\
= \; & c' \; \Phi_{\theta,q}\left(J\left(s, u(s); A_0, A_1\right)\right) \underbrace{\int_0^\infty \min\Big(\tau^{\overbrace{\theta - \theta_0}^{>0}}, \tau^{\overbrace{\theta - \theta_1}^{<0}}\Big) \frac{\mathrm{d}\tau}{\tau}}_{= \int_0^1 \tau^{\theta-\theta_0} \frac{\mathrm{d}\tau}{\tau} \; + \; \int_1^\infty \tau^{\theta-\theta_1} \frac{\mathrm{d}\tau}{\tau} \; \leq \; C} \\
\leq \; & c \; \Phi_{\theta,q}\left(J\left(s, u(s); A_0, A_1\right)\right)
\end{aligned}
$$

$$
\underset{\inf}{\Longrightarrow} \quad \left\| a \middle| \left(E_0, E_1\right)_{\eta,q} \right\| \; \leq \; c \; \left\| a \middle| \left(A_0, A_1\right)_{\theta,q} \right\|
$$

$\square$

[26] verallgemeinerte Dreiecksungleichung für Integrale, [HLP52, Thm. 202, p. 148]

Bemerkung :

- (1) $\dashrightarrow$ Reiterationssatz
- wesentlich : $\theta_0 \neq \theta_1$ $\quad(\theta_0 > \theta_1 \dashrightarrow$ Satz 4.2 (i))
- $\theta_0 = \theta_1 = \theta$: [BL76, Thms. 3.5.4, 5.2.4]
  $\{A_0, A_1\}$ Interpolationspaar, $0 < \theta < 1$, $0 < \eta < 1$, $1 \le q_0, q_1 \le \infty$

$$\Big((A_0, A_1)_{\theta,q_0}\ ,\ (A_0, A_1)_{\theta,q_1}\Big)_{\eta,q} = (A_0, A_1)_{\theta,q} \quad \text{mit} \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\eta}{q_0} + \frac{\eta}{q_1}$$

Folgerung 1 *Seien A ein Banach-Raum, $1 < p_0, p_1 < \infty$, $p_0 \neq p_1$, $1 \le q_0, q_1, q \le \infty$, und $0 < \eta < 1$. Dann gilt für $\frac{1}{p} = \frac{1-\eta}{p_0} + \frac{\eta}{p_1}$*

$$\Big(\ell_{p_0,q_0}(A), \ell_{p_1,q_1}(A)\Big)_{\eta,q} = \ell_{p,q}(A)\ ,$$

d.h. insbesondere

$$\Big(\ell_{p_0}(A), \ell_{p_1}(A)\Big)_{\eta,p} = \ell_p(A)\ .$$

B e w e i s : verwenden Satz 2 und Satz 5.2 mit $A_0 = \ell_1(A)$, $A_1 = \ell_\infty(A)$, θ_i so, dass $p_i = \frac{1}{1-\theta_i}$ gilt, d.h. $\theta_i = 1 - \frac{1}{p_i}$, $i = 0, 1$

$$\underset{\text{Satz 5.2}}{\Longrightarrow} \quad (A_0, A_1)_{\theta_i,q_i} = \Big(\ell_1(A), \ell_\infty(A)\Big)_{1-\frac{1}{p_i},q_i} = \ell_{p_i,q_i}(A), \quad 1 \le q_i \le \infty, \quad i = 0, 1$$

$$\underset{\text{Satz 2, (1)}}{\Longrightarrow} \Big(\underbrace{\big(\ell_1(A), \ell_\infty(A)\big)_{1-\frac{1}{p_0},q_0}}_{\ell_{p_0,q_0}(A)}\ ,\ \underbrace{\big(\ell_1(A), \ell_\infty(A)\big)_{1-\frac{1}{p_1},q_1}}_{\ell_{p_1,q_1}(A)}\Big)_{\eta,q} = \Big(\ell_1(A), \ell_\infty(A)\Big)_{\theta,q} \underset{\text{Satz 5.2}}{=} \ell_{\frac{1}{1-\theta},q}(A)$$

mit

$$\theta := (1-\eta)\underbrace{\left(1 - \frac{1}{p_0}\right)}_{\theta_0} + \eta\underbrace{\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)}_{\theta_1} = 1 \underbrace{- \frac{1-\eta}{p_0} - \frac{\eta}{p_1}}_{-\frac{1}{p}} = 1 - \frac{1}{p} \iff \frac{1}{1-\theta} = p$$

$\square$

Bemerkung : *'Randfälle'* : Folgerung 1 mit $p_0 = q_0 = 1$, $p_1 = q_1 = \infty$, $1 \le q \le \infty$ entspricht Satz 5.2

8 Kompakte Operatoren, Retraktionen und Koretraktionen

bisher:

$T \in \mathcal{L}\left(\{A_0, A_1\}, \{B_0, B_1\}\right)$, d.h. $T\big|_{A_i} \in \mathcal{L}(A_i, B_i)$, $i = 0, 1$ $\quad\Longrightarrow\quad T : (A_0, A_1)_{\theta,q} \to (B_0, B_1)_{\theta,q}$ <u>*stetig*</u>

jetzt:

falls zusätzlich $T\big|_{A_i} : A_i \longrightarrow B_i$ kompakt, $i = 0 \vee i = 1$ $\underset{?}{\Longrightarrow}$ $T : (A_0, A_1)_{\theta,q} \to (B_0, B_1)_{\theta,q}$ <u>*kompakt?*</u>

Satz 1 **(i)** *Seien* $\{A_0, A_1\}$ *ein Interpolationspaar,* B *ein Banachraum, und* $T \in \mathcal{L}(\{A_0, A_1\}, \{B, B\})$, *für den gelte*

$$T : A_0 \longrightarrow B \quad \textit{kompakt}$$

und

$$T : A_1 \longrightarrow B \quad \textit{stetig} .$$

Für $A \in \mathcal{K}(\theta; A_0, A_1)$, $0 < \theta < 1$, *ist dann*

$$T : A \longrightarrow B \quad \textit{kompakt} .$$

(ii) *Seien* A *ein Banachraum,* $\{B_0, B_1\}$ *ein Interpolationspaar, und* $S \in \mathcal{L}(\{A, A\}, \{B_0, B_1\})$, *für den gelte*

$$S : A \longrightarrow B_0 \quad \textit{kompakt}$$

und

$$S : A \longrightarrow B_1 \quad \textit{stetig} .$$

Für $B \in \mathcal{J}(\theta; B_0, B_1)$, $0 < \theta < 1$, *ist dann*

$$S : A \longrightarrow B \quad \textit{kompakt} .$$

Beweis : $\boxed{\text{zu (i)}}$: sei $\{a_k\}_{k=0}^{\infty} \subset A$, $\|a_k|A\| \le 1$, <u>z.z.</u>: $\exists\, \{a_{k_\ell}\}_\ell$ Teilfolge : $\{Ta_{k_\ell}\}_\ell$ Cauchy-Folge in B

$$A \in \mathcal{K}(\theta; A_0, A_1) \underset{A \hookrightarrow A_0 + A_1}{\Longrightarrow} \exists\, \{a_k^i\}_k \subset A_i,\ i = 0, 1 \quad \forall\, k \in \mathbb{N}_0 \ :$$

$$a_k = a_k^0 + a_k^1, \quad \left\|a_k^0|A_0\right\| + t\ \left\|a_k^1|A_1\right\| \le\ 2\ K(t, a_k; A_0, A_1) \underset{\substack{A\, \in\, \mathcal{K}(\theta;\, A_0, A_1)\\ \text{Def. 7.1 (i)}}}{\le} 2\ c\ t^\theta\ \underbrace{\|a_k|A\|}_{\le 1}\ \le\ 2\ c\ t^\theta \quad (*)$$

$$\curvearrowright\ \left\{a_k^0\right\}_k \subset A_0 \ \text{ beschränkt } \underset{\substack{T\,:\,A_0 \to B\\ \text{kompakt}}}{\Longrightarrow} \left\{Ta_k^0\right\}_k \subset B \ \text{ präkompakt, } \exists\ \left\{Ta_{k_\ell}^0\right\}_\ell \subset \left\{Ta_k^0\right\}_k \ \text{ Cauchy-}$$

Teilfolge in B, d.h. $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, L = L(\varepsilon) \quad \forall\, \ell \ge r \ge L \ : \ \left\|Ta_{k_\ell}^0 - Ta_{k_r}^0|B\right\| < \varepsilon$

andererseits : $\left\|Ta_{k_\ell}^1 - Ta_{k_r}^1|B\right\| \ \le\ \|T|\mathcal{L}(A_1, B)\|\ \underbrace{\left\|a_{k_\ell}^1 - a_{k_r}^1|A_1\right\|}_{\le\ 4ct^{\theta-1},\ (*)} \le\ c'\ t^{\theta-1} < \varepsilon, \quad t > t_0(\varepsilon)$

$\curvearrowright\ \exists\, \{a_{k_\ell}\}_\ell$ Teilfolge $\ \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, L = L(\varepsilon) \quad \forall\, \ell \ge r \ge L : \|Ta_{k_\ell} - Ta_{k_r}|B\| < 2\varepsilon \ \curvearrowright\ T$ kompakt

$\boxed{\text{zu (ii)}}$: sei $\{a_k\}_{k=0}^{\infty} \subset A$, $\|a_k|A\| \le 1 \underset{\substack{S\,:\,A \to B_0\\ \text{kompakt}}}{\Longrightarrow} \{Sa_k\}_k \subset B_0$ präkompakt

$\curvearrowright\ \exists\, \{Sa_{k_\ell}\}_\ell \subset \{Sa_k\}_k$ Cauchy-Folge in B_0, $\forall\, t > 0 \quad \exists\, m = m(t) \quad \forall\, \ell \ge r \ge m \ : \ \|Sa_{k_\ell} - Sa_{k_r}|B_0\| < t$

andererseits : $\|Sa_{k_\ell} - Sa_{k_r}|B_1\| \ \le\ \|S|\mathcal{L}(A, B_1)\|\ \underbrace{\|a_{k_\ell} - a_{k_r}|A\|}_{\le\ 2} \le\ 2\,\|S|\mathcal{L}(A, B_1)\|$

$$B \in \mathcal{J}(\theta; A_0, A_1) \underset{\text{Def. 7.1 (ii)}}{\Longrightarrow} \|b|B\| \ \le\ c\, t^{-\theta}\ J(t, b; B_0, B_1)\ , \quad b \in B_0 \cap B_1$$

$$\underset{b\,:=\,Sa_{k_\ell} - Sa_{k_r}}{\Longrightarrow} \|Sa_{k_\ell} - Sa_{k_r}|B\| \ \le\ c\, t^{-\theta}\ \underbrace{\max\Big(\overbrace{\|Sa_{k_\ell} - Sa_{k_r}|B_0\|}^{<t},\ t\ \overbrace{\|Sa_{k_\ell} - Sa_{k_r}|B_1\|}^{\le\ 2\|S|\mathcal{L}(A,B_1)\|}\Big)}_{J(t, Sa_{k_\ell} - Sa_{k_r}; B_0, B_1)}$$

$$\le\ \underbrace{c\ \max\big(1, 2\ \|S|\mathcal{L}(A, B_1)\|\big)}_{c'}\ t^{1-\theta} \ <\ \varepsilon, \quad t < t_0(\varepsilon)$$

$\curvearrowright\ \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, m = m(\varepsilon) \quad \forall\, \ell \ge r \ge m \ : \|Sa_{k_\ell} - Sa_{k_r}|B\| < \varepsilon \ \curvearrowright\ S$ kompakt $\square$

Bemerkung :

- Sätze 4.2 (i), 6.2 $\dashrightarrow$ alternative Formulierung : *mindestens einer der beiden Operatoren $T \in \mathcal{L}(A_i, B)$, $i = 0, 1$, sei kompakt*; analog für S
- generell : $T \in \mathcal{L}(\{A_0, A_1\}, \{B_0, B_1\}) \underset{\text{Bedingungen ?}}{\Longrightarrow} T : (A_0, A_1)_{\theta,q} \underset{\text{komp.}}{\longrightarrow} (B_0, B_1)_{\theta,q}$?

  Krasnosel'ski [Kra60] : $A_i = L_{p_i}$, $B_i = L_{q_i}$, $1 \le p_i, q_i \le \infty$, $i = 0, 1$, $q_0 < \infty$, $T : L_{p_0} \underset{\text{komp.}}{\longrightarrow} L_{q_0}$, $0 < \theta < 1$

  $$\Longrightarrow \quad T : L_p \underset{\text{komp.}}{\longrightarrow} L_q, \quad \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$$

  Lions, Peetre [LP64] : $A_0 = A_1 \vee B_0 = B_1$, $T : A_i \underset{\text{komp.}}{\longrightarrow} B_i$, $i = 0 \vee i = 1$ (Satz 1)

  Persson [Per64] : zusätzliche Approximationseigenschaft für (B_0, B_1)

  Hayakawa [Hay69] : $T : A_j \underset{\text{komp.}}{\longrightarrow} B_j$, $j = 0 \wedge j = 1$, $0 < \theta < 1$, $1 \le q < \infty$

  Cobos, Edmunds, Potter [CEP90] : $\dashrightarrow$ exakter Beweis & Ausdehnung für $0 < q \le 1$, $q = \infty$; ausreichend auch $T : A_0 \underset{\text{komp.}}{\longrightarrow} B_0$, falls $B_1 \hookrightarrow B_0$

  Cwikel [Cwi92] : $T : A_i \underset{\text{komp.}}{\longrightarrow} B_i$, $i = 0 \vee i = 1$

Erinnerung: $A_0 \hookrightarrow A_1 \underset{\text{Satz 4.2(iii)}}{\Longrightarrow} (A_0, A_1)_{\theta_0,q_0} \hookrightarrow (A_0, A_1)_{\theta_1,q_1}$ für $0 < \theta_0 < \theta_1 < 1$, $1 \le q_0, q_1 \le \infty$

Folgerung 1 *Seien $\{A_0, A_1\}$ ein Interpolationspaar mit kompakter Einbettung $A_0 \hookrightarrow A_1$, $1 \le q_0, q_1 \le \infty$, $0 < \theta_0 < \theta_1 < 1$. Dann ist die Einbettung $(A_0, A_1)_{\theta_0,q_0} \hookrightarrow (A_0, A_1)_{\theta_1,q_1}$ kompakt.*

B e w e i s : betrachten

$$\left.\begin{array}{ll} \mathrm{id} : A_0 \longrightarrow A_1 & \text{kompakt} \\ \mathrm{id} : A_1 \longrightarrow A_1 & \text{stetig} \\ (A_0, A_1)_{\theta_0,q_0} \in \mathcal{K}(\theta_0; A_0, A_1) & \end{array}\right\} \underset{\text{Satz 1 (i)}}{\Longrightarrow} \mathrm{id} : (A_0, A_1)_{\theta_0,q_0} \underset{\text{komp.}}{\longrightarrow} A_1$$

analog

$$\left.\begin{array}{ll} \mathrm{id} : (A_0, A_1)_{\theta_0,q_0} \longrightarrow A_1 & \text{kompakt} \\ \mathrm{id} : (A_0, A_1)_{\theta_0,q_0} \longrightarrow (A_0, A_1)_{\theta_0,q_0} & \text{stetig} \\ \underline{\text{falls}}\ \exists\, \eta \in (0,1) :\ (A_0, A_1)_{\theta_1,q_1} \in \mathcal{J}\Big(\eta; A_1, (A_0, A_1)_{\theta_0,q_0}\Big) & \end{array}\right\} \underset{\text{Satz 1 (ii)}}{\Longrightarrow} \mathrm{id} : (A_0, A_1)_{\theta_0,q_0} \underset{\text{komp.}}{\longrightarrow} (A_0, A_1)_{\theta_1,q_1}$$

<u>g.z.z.</u> $\exists\, \eta \in (0,1) : (A_0, A_1)_{\theta_1,q_1} \in \mathcal{J}\Big(\eta; A_1, (A_0, A_1)_{\theta_0,q_0}\Big)$

$$(A_0, A_1)_{\theta_1,q_1} \underset{\text{Satz 7.2}}{=} \Big(A_1, (A_0, A_1)_{\theta_0,q_0}\Big)_{\eta,q_1} \quad \text{mit} \quad \theta_1 = (1-\eta) \underbrace{\widetilde{\theta}_0}_{1} + \eta \underbrace{\widetilde{\theta}_1}_{\theta_0} \quad \text{für} \quad \eta := \frac{1-\theta_1}{1-\theta_0} \in (0,1)$$

$E_0 := A_1 \in \mathcal{K}(1; A_0, A_1)$
$E_1 := (A_0, A_1)_{\theta_0,q_0} \in \mathcal{K}(\theta_0; A_0, A_1)$

□

Bemerkung : *Entropie-Zahlen* : $T \in \mathcal{L}(A, B)$, $k \in \mathbb{N}$, $U_A := \{a \in A\ : \|a|A\| \le 1\}$

$$e_k(T : A \to B) := \inf\left\{\varepsilon > 0 : \text{es gibt } 2^{k-1}\ \varepsilon\text{-Kugeln in } B, \text{ die } T(U_A) \text{ überdecken}\right\}$$

bekannt : $\lim\limits_{k\to\infty} e_k(T : A \to B) = 0 \iff T : A \underset{\text{komp.}}{\longrightarrow} B$

$\dashrightarrow$ charakterisieren Kompaktheit von T durch asymptotisches Verhalten von $\{e_k(T)\}_{k=1}^{\infty}$

Frage : $e_k\Big(T : (A_0, A_1)_{\theta,q} \to (B_0, B_1)_{\theta,q}\Big)$ abschätzbar durch $e_k\left(T : A_i \to B_i\right)$, $i = 0, 1$?

Bemerkung : *Wunsch* : $\exists\, c > 0 \quad \forall\, k, m \in \mathbb{N}$:

$$e_{k+m-1}\left(T : (A_0, A_1)_{\theta,q} \to (B_0, B_1)_{\theta,q}\right) \le c\, e_k\,(T : A_0 \to B_0)^{1-\theta}\, e_m\,(T : A_1 \to B_1)^{\theta}$$

⇢ in dieser Allgemeinheit bisher noch offen !

Teilresultate : analog zu Satz 1,

- $B_0 = B_1 = B,\;\; T \in \mathcal{L}(\{A_0, A_1\}, \{B, B\}),\;\; A \in \mathcal{K}(\theta; A_0, A_1)$:

$$e_{k+m-1}\,(T : A \to B) \le \; c\; e_k\,(T : A_0 \to B)^{1-\theta}\, e_m\,(T : A_1 \to B)^{\theta}$$

- $A_0 = A_1 = A,\;\; T \in \mathcal{L}(\{A, A\}, \{B_0, B_1\}),\;\; B \in \mathcal{J}(\theta; B_0, B_1)$:

$$e_{k+m-1}\,(T : A \to B) \le \; c\; e_k\,(T : A \to B_0)^{1-\theta}\, e_m\,(T : A \to B_1)^{\theta}$$

Peetre [Pee68] $\;A_0 = A_1 = B_0$ (in Sprache der Entropie-Ideale)

Triebel [Tri78, Thm. 1.16.2/1,2] (in Sprache der Entropie-Ideale)

Pietsch [Pie78, Prop. 12.1.11, 12.1.12] $\;c = 2$

Haroske, Triebel [HT94], [ET96, Thm. 1.3.2] Abschwächung der Voraussetzung, Erweiterung auf p-Banach-Räume, $0 < p \le 1$ ⇢ $c = 2^{\frac{1}{p}}$

Definition 1 *Seien* A, B *Banachräume,* $R \in \mathcal{L}(A, B)$*. Dann heißt* R Retraktion, *falls ein* $S \in \mathcal{L}(B, A)$ *existiert mit*

$$R \circ S \;=\; \mathrm{id}_B\ .$$

S *heißt dann (die zu* R *gehörige)* Koretraktion.

Bemerkung : S i.a. nicht eindeutig bestimmt

Erinnerung : $P \in \mathcal{L}(A, A) = \mathcal{L}(A)$ Projektor $\iff$ $P^2 = P$

Satz 2 *Seien* $\{A_0, A_1\}, \{B_0, B_1\} \in \mathfrak{C}_2$ *Interpolationspaare,* $F : \mathfrak{C}_2 \longrightarrow \mathfrak{C}_1$ *ein beliebiger Interpolationsfunktor, und* $R \in \mathcal{L}\left(\{A_0, A_1\}, \{B_0, B_1\}\right)$*,* $S \in \mathcal{L}\left(\{B_0, B_1\}, \{A_0, A_1\}\right)$ *mit*

$$R\big|_{A_0} \circ S\big|_{B_0} \;=\; \mathrm{id}_{B_0}\ ,\quad R\big|_{A_1} \circ S\big|_{B_1} \;=\; \mathrm{id}_{B_1}\ ,$$

d.h. einander entsprechende Retraktionen und Koretraktionen. Dann gilt :

(i) $(SR)\,\big|_{F(\{A_0,A_1\})}$ *ist ein Projektor in* $F(\{A_0, A_1\})$

(ii) S *ist ein Isomorphismus von* $F(\{B_0, B_1\})$ *auf* $\mathrm{Im}\left((SR)\,\big|_{F(\{A_0,A_1\})}\right) \subset F(\{A_0, A_1\})$.

Beweis : $\boxed{\text{zu (i)}}$: sei $b \in F(\{B_0, B_1\}) \underset{\text{Def. 3.6 (ii)}}{\subset} B_0 + B_1 \implies b = b_0 + b_1,\;\; b_i \in B_i,\; i = 0, 1$

$$\implies (RS)b = (RS)(b_0 + b_1) = \underbrace{(RS)}_{\mathrm{id}_{B_0}} b_0 + \underbrace{(RS)}_{\mathrm{id}_{B_1}} b_1 = b, \quad b \in F(\{B_0, B_1\}) \tag{1}$$

sei $a \in F(\{A_0,A_1\}) \underset{\text{Def. 3.6 (i)}}{\Longrightarrow} Ra \in F(\{B_0,B_1\}),\ (SR)^2\, a = (SRSR)\, a \underset{\substack{\text{Def. 3.5 (ii)}\\ \text{(A2)}}}{=} S\underbrace{(RS)\overbrace{Ra}^{\in F(\{B_0,B_1\})}}_{Ra,\ (1)} = (SR)a$

$$\Longrightarrow \quad \Big[(SR)\big|_{F(\{A_0,A_1\})}\Big]^2 = (SR)\big|_{F(\{A_0,A_1\})} \tag{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} R \in \mathcal{L}\left(\{A_0,A_1\},\{B_0,B_1\}\right) \underset{\text{Def. 3.6 (i)}}{\Longrightarrow} F(R) \in \mathcal{L}\left(F(\{A_0,A_1\}),F(\{B_0,B_1\})\right) \\ S \in \mathcal{L}\left(\{B_0,B_1\},\{A_0,A_1\}\right) \underset{\text{Def. 3.6 (i)}}{\Longrightarrow} F(S) \in \mathcal{L}\left(F(\{B_0,B_1\}),F(\{A_0,A_1\})\right) \end{array}\right\} \underset{\text{Def. 3.6 (i)}}{\Longrightarrow} \begin{array}{l} F(SR) = F(S)F(R) \\ \in \mathcal{L}\left(F(\{A_0,A_1\})\right) \end{array}$$

$F(SR) \underset{\text{Def. 3.6 (ii)}}{=} (SR)\big|_{F(\{A_0,A_1\})} \in \mathcal{L}\left(F(\{A_0,A_1\})\right) \underset{(2)}{\Longrightarrow} (SR)\big|_{F(\{A_0,A_1\})}$ Projektor in $F(\{A_0,A_1\})$

$\boxed{\text{zu (ii)}}$: sei $W := \operatorname{Im}\Big((SR)\big|_{F(\{A_0,A_1\})}\Big) \underset{\text{(i)}}{\subset} F(\{A_0,A_1\}) \implies W$ abgeschlossen;

<u>z.z.</u> : $S : F(\{B_0,B_1\}) \longrightarrow W$ Isomorphismus

$S\left(F(\{B_0,B_1\})\right) \subset W$:

sei $b \in F(\{B_0,B_1\}) \underset{(1)}{\Longrightarrow} (RS)b = b \implies Sb = S\overbrace{(RS)\,b}^{b} \underset{\text{Def. 3.5 (ii)}}{=} SR\underbrace{(Sb)}_{\in F(\{A_0,A_1\}),\ \text{Def. 3.6 (i),(ii)}}$

$$\underset{\text{Def. 3.6 (ii)}}{=} (SR)\big|_{F(\{A_0,A_1\})}(Sb) \implies Sb \in W$$

$S\left(F(\{B_0,B_1\})\right) = W$: (Surjektion)

sei $a \in W \subset F(\{A_0,A_1\}) \implies a = S\underbrace{R\big|_{F(\{A_0,A_1\})}\, a}_{=:b\in F(\{B_0,B_1\})} \implies \exists\, b \in F(\{B_0,B_1\}) : S\big|_{F(\{B_0,B_1\})}\, b = a$

$S : F(\{B_0,B_1\}) \longrightarrow W$ injektiv

seien $b_1, b_2 \in F(\{B_0,B_1\})$ mit $Sb_1 = Sb_2 = a \underset{R\ \text{eindeutig}}{\Longrightarrow} \underbrace{RSb_1}_{b_1} = \underbrace{RSb_2}_{b_2} = Ra \iff b_1 = b_2$

$\curvearrowright \quad S^{-1} : W \longrightarrow F(\{B_0,B_1\})$ existiert, S^{-1} stetig :

W abgeschlossen $\underset{\text{Satz vom abg. Graphen}}{\Longrightarrow} S^{-1}$ beschränkt □

Bemerkung :

- [Tri78, Thm. 1.2.4]
- speziell $F := (\cdot,\cdot)_{\theta,q} : \mathfrak{C}_2 \longrightarrow \mathfrak{C}_1,\ F(\{A_0,A_1\}) := (A_0,A_1)_{\theta,q}$

  $\underset{\text{Satz 2 (i)}}{\Longrightarrow} (SR)\big|_{(A_0,A_1)_{\theta,q}}$ Projektor in $(A_0,A_1)_{\theta,q}$

  $\underset{\text{Satz 2 (ii)}}{\Longrightarrow} \operatorname{Im}\left((SR)\big|_{(A_0,A_1)_{\theta,q}}\right) \cong (B_0,B_1)_{\theta,q}$ isomorph, S Isomorphismus
- *'Philosophie'* : Interpolationspaar $\{A_0,A_1\}$ sei gegeben, $F(\{A_0,A_1\})$ bekannt; sei $\{B_0,B_1\}$ weiteres Interpolationspaar; falls S (und R) wie in Satz 2 konstruierbar sind $\dashrightarrow$ $F(\{B_0,B_1\})$ bestimmbar (isomorph), d.h. Retraktion/Koretraktion liefern Reduktion unbekannter Interpolationsräume auf bekannte

9 Interpolation von L_p-Räumen

Seien $(X, \mathfrak{X}, \mu)$ (vollständiger) Maßraum, μ ... σ-endliches, positives Maß auf $(X, \mathfrak{X})$, z.B. $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}, \ell_n)$; A ein Banach-Raum; erweitern Skala $L_p(A) = L_p(A; X, \mathfrak{X}, \mu)$, $1 \le p \le \infty$, aller bezüglich μ p-integrierbaren, Banachraum-wertigen Funktionen $f : X \longrightarrow A$, d.h. mit

$$\|f|L_p(A)\| = \begin{cases} \left(\int\limits_X \|f(x)|A\|^p \, \mu(\,\mathrm{d}x) \right)^{\frac{1}{p}} & , \quad 1 \le p < \infty \\ \operatorname*{ess\ sup}\limits_{x \in X} \|f(x)|A\| & , \quad p = \infty \end{cases} < \infty$$

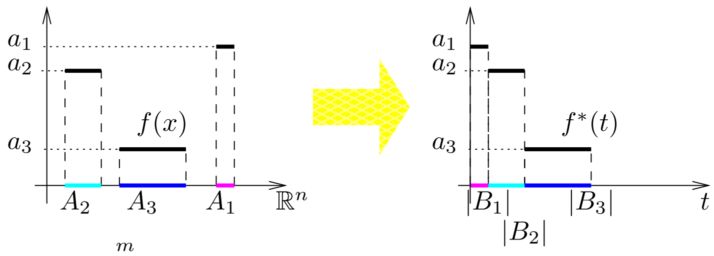
Sei $f \in L_1(A) + L_\infty(A)$, setzen

$$\varrho(f, \sigma) := \mu\left(\{x \in X \ : \ \|f(x)|A\| > \sigma\}\right) \ , \quad \sigma > 0$$

Definition 1 *Sei* $f \in L_1(A) + L_\infty(A)$, *dann ist ihre* monoton fallende Umordnungsfunktion $f^* : (0, \infty) \longrightarrow [0, \mu(X)]$ *definiert als*

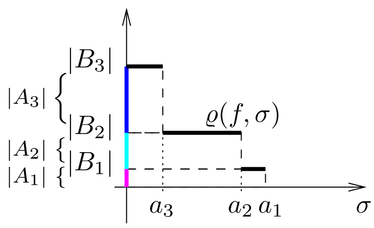
$$f^*(t) := \inf\{\sigma > 0 \ : \ \varrho(f, \sigma) \le t\} \ , \quad t > 0.$$

Beispiel : $(X, \mathfrak{X}, \mu) = (\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}, \ell_n)$, $A = \mathbb{R}$, Treppenfunktionen



$$f(x) = \sum_{j=1}^{m} a_j \chi_{A_j}(x)$$
$$a_1 > a_2 > \cdots > 0$$
$$A_j \cap A_k = \emptyset, \ j \ne k$$

$$f^*(t) = \sum_{j=1}^{m} a_j \chi_{[|B_{j-1}|, |B_j|)}(t)$$
$$|B_0| = 0$$



$$B_\ell = \bigcup_{j=1}^{\ell} A_j$$

Bemerkung :

- $\varrho(f, \sigma)$, $f^*(t)$ ... monoton fallend (d.h. nicht wachsend) $\dashrightarrow$ „*non-increasing rearrangement*", rechtsseitig stetig, $\lim\limits_{\sigma \to \infty} \varrho(f, \sigma) = 0$
- $\mu(X) < \infty \quad \Longrightarrow \quad f^*(t) = 0, \ \ t > \mu(X)$
- $f \in L_\infty(A) \quad \Longrightarrow \quad f^*(0) := \lim\limits_{t \downarrow 0} f^*(t) = \|f|L_\infty(A)\|$

- <u>wesentlich</u> : *maßtreue Umordnung*, d.h.

$$|\{t > 0 \;:\; f^*(t) > \sigma\}| = \mu\left(\{x \in X \;:\; \|f(x)|A\| > \sigma\}\right), \quad \sigma > 0, \tag{1}$$

  bzw. für $\sigma_2 \geq \sigma_1 > 0$,

$$|\{t > 0 \;: \sigma_2 > f^*(t) > \sigma_1\}| \;=\; \mu\left(\{x \in X \;:\; \sigma_2 > \|f(x)|A\| > \sigma_1\}\right) \tag{2}$$

  (in (2) jeweils „$\geq$“ statt „$>$“ möglich)

- ausführliche Darstellung z.B. in [BS88, Ch. 2]
- $f \mapsto f^*$ ... kontinuierliche Variante von $\xi \mapsto \xi^* = \{\xi_j^*\}_{j=0}^{\infty}$, Definition 5.2

Definition 2 *Seien A ein Banach-Raum, $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$. Dann ist $L_{p,q}(A)$ der Raum aller Funktionen $f \in L_1(A) + L_\infty(A)$, für die gilt*

$$\|f|L_{p,q}(A)\| := \left\{ \begin{array}{ll} \left(\int\limits_0^\infty \left[t^{\frac{1}{p}}\; f^*(t) \right]^q \; \frac{\mathrm{d}t}{t} \right)^{\frac{1}{q}} & , \quad q < \infty \\ \sup\limits_{0<t<\infty} \; t^{\frac{1}{p}}\; f^*(t) & , \quad q = \infty \end{array} \right\} \;<\; \infty \;.$$

Bemerkung :

- $L_{p,q}$ *Lorentz*-Raum, $L_{p,\infty}$ *Marcinkiewicz*[27]-Raum
- $L_{p,p}(A) = L_p(A)$, $1 \leq p < \infty$, $\|f|L_{p,\infty}(A)\| = \sup\limits_{\sigma>0} \; \sigma \left[\mu\left(\{x \in X : \|f(x)|A\| \geq \sigma\}\right)\right]^{\frac{1}{p}}$
- Monotonie : $L_{p,q}(A) \hookrightarrow L_{p,u}(A)$, $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq u \leq \infty$
- $\|\cdot|L_{p,q}(A)\|$ i.a. nur Quasi-Norm

Satz 1 *Seien A ein Banach-Raum, $1 \leq q \leq \infty$, $0 < \theta < 1$. Dann gilt*

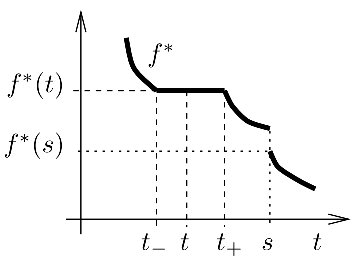
$$\left(L_1(A), L_\infty(A)\right)_{\theta,q} \;=\; L_{\frac{1}{1-\theta},q}(A) \;.$$

B e w e i s : <u>1. Schritt</u> : zeigen $K\left(t, f; L_1(A), L_\infty(A)\right) \;=\; \int\limits_0^t f^*(\tau)\,\mathrm{d}\tau$, $f \in L_1(A) + L_\infty(A)$

Seien $t_- := \inf\{s > 0 \;:\; f^*(t) = f^*(s)\} \;\leq\; t$ und

$\mathcal{A}_t^* \;:=\; \{x \in X \;:\; \|f(x)|A\| \;>\; f^*(t)\} \;\in \mathfrak{X} \;\underset{(1)}{\Longrightarrow}\; \mu\left(\mathcal{A}_t^*\right) \;=\; t_-$

Sei $y \;\in\; \mathcal{B}_t^* \;:=\; \{x \in X : \|f(x)|A\| = f^*(t)\}$, falls $\mu\left(\mathcal{B}_t^*\right) \;=\; t_+ - t_- \;\geq\; t - t_- > 0$



$$\Longrightarrow \int\limits_0^t f^*(\tau)\,\mathrm{d}\tau \;=\; \int\limits_0^{t_-} f^*(\tau)\,\mathrm{d}\tau \;+\; \int\limits_{t_-}^{t} \underbrace{f^*(\tau)}_{\equiv\;\|f(y)|A\|}\,\mathrm{d}\tau \;\underset{(2)}{=}\; \int\limits_{\mathcal{A}_t^*} \|f(x)|A\|\,\mu(\,\mathrm{d}x) \;+\; \|f(y)|A\|\,(t - t_-)$$

[27] Józef Marcinkiewicz (* 4.3.1910 Cimoszka, Bialystok/Polen † 1940 Polen)

Sei $f \in L_1(A) + L_\infty(A)$, $f = f^0 + f^1$, $f^0 \in L_1(A)$, $f^1 \in L_\infty(A)$, wählen jetzt $y^0 = y\left(f^0\right) \in \mathcal{B}_t^*$ so, dass $\left\|f^0\left(y^0\right)|A\right\| = \min\left\{\left\|f^0(x)|A\right\|,\ x \in \mathcal{B}_t^*\right\}$ $\curvearrowright$

$$\int_0^t f^*(\tau)\,\mathrm{d}\tau \le \underbrace{\int_{\mathcal{A}_t^*} \left\|f^0(x)|A\right\|\mu(\,\mathrm{d}x) + \underbrace{\left\|f^0\left(y^0\right)|A\right\| \overbrace{\int_{\mathcal{B}_t^*}\mu(\,\mathrm{d}x)}^{(t-t_-)\le}}_{\le \int_{\mathcal{B}_t^*}\|f^0(x)|A\|\mu(\,\mathrm{d}x)}}_{\le \int_X \|f^0(x)|A\|\mu(\,\mathrm{d}x)\ =\ \|f^0|L_1(A)\|} + \underbrace{\int_{\mathcal{A}_t^*} \left\|f^1(x)|A\right\|\mu(\,\mathrm{d}x)}_{\le\ \left\|f^1|L_\infty(A)\right\|\mu\left(\mathcal{A}_t^*\right)\ =\ t_-\left\|f^1|L_\infty(A)\right\|} + \underbrace{\left\|f^1(y^0)|A\right\|}_{\le\|f^1|L_\infty(A)\|}(t-t_-)$$

$$\le \left\|f^0|L_1(A)\right\| \ +\ t\ \left\|f^1|L_\infty(A)\right\|$$

$$\underset{\inf}{\Longrightarrow} \int_0^t f^*(\tau)\,\mathrm{d}\tau \le K\left(t,f;L_1(A),L_\infty(A)\right)$$

Sei $f = \widehat{f}^0 + \widehat{f}^1$ eine spezielle Zerlegung, $\widehat{f}^0(x) = \begin{cases} f(x) - \dfrac{f(x)}{\|f(x)|A\|}\ f^*(t) & , x \in \mathcal{A}_t^* \\ 0 & , x \in X\setminus\mathcal{A}_t^* \end{cases}$, $\widehat{f}^1 = f - \widehat{f}^0$

$$\begin{aligned}
\left\|\widehat{f}^0|L_1(A)\right\| &= \int_X \left\|\widehat{f}^0(x)|A\right\|\mu(\,\mathrm{d}x) = \int_{\mathcal{A}_t^*}\left\|\widehat{f}^0(x)|A\right\|\mu(\,\mathrm{d}x)\\
&= \int_{\mathcal{A}_t^*} \|f(x)|A\|\ \underbrace{\left|1-\frac{f^*(t)}{\|f(x)|A\|}\right|}_{=1-\frac{f^*(t)}{\|f(x)|A\|},\ x\in\mathcal{A}_t^*}\mu(\,\mathrm{d}x) = \underbrace{\int_{\mathcal{A}_t^*}\|f(x)|A\|\,\mu(\,\mathrm{d}x)}_{\int_0^{t_-} f^*(\tau)\,\mathrm{d}\tau} - f^*(t)\underbrace{\int_{\mathcal{A}_t^*}\mu(\,\mathrm{d}x)}_{\mu(\mathcal{A}_t^*)\ =\ t_-}\\
&= \int_0^{t_-} f^*(\tau)\,\mathrm{d}\tau\ -\ f^*(t)\ t_-
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left\|\widehat{f}^1|L_\infty(A)\right\| &= \operatorname*{ess\,sup}_{x\in X}\left\|\widehat{f}^1(x)|A\right\|\\
&= \max\left\{\underbrace{\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathcal{A}_t^*}\left\|f(x) - \underbrace{\left(f(x) - \frac{f(x)}{\|f(x)|A\|}\ f^*(t)\right)}_{\widehat{f}^0(x)}\,|A\right\|}_{=\ f^*(t)},\operatorname*{ess\,sup}_{x\in X\setminus\mathcal{A}_t^*}\ \underbrace{\left\|\underbrace{f(x)}_{=\widehat{f}^1(x)}|A\right\|}_{\le\ f^*(t),\ x\in X\setminus\mathcal{A}_t^*}\right\} = f^*(t)
\end{aligned}$$

$$\underset{\inf}{\Longrightarrow}\ K\left(t,f;L_1(A),L_\infty(A)\right) \le \left\|\widehat{f}^0|L_1(A)\right\| + t\left\|\widehat{f}^1|L_\infty(A)\right\| \le \int_0^{t_-} f^*(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \underbrace{\int_{t_-}^t \overbrace{f^*(\tau)}^{\equiv\ f^*(t)}\,\mathrm{d}\tau}_{f^*(t)\ (t-t_-)} = \int_0^t f^*(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

$$\Longrightarrow\ K\left(t,f;L_1(A),L_\infty(A)\right) = \int_0^t f^*(\tau)\,\mathrm{d}\tau,\quad t>0 \tag{3}$$

2. Schritt : zeigen $\left(L_1(A),L_\infty(A)\right)_{\theta,q} \hookrightarrow L_{\frac{1}{1-\theta},q}(A)$; sei zuerst $\boxed{q<\infty}$

$$\left\|f|\left(L_1(A),L_\infty(A)\right)_{\theta,q}\right\|^q = \int_0^\infty t^{-\theta q}\underbrace{K\left(t,f;L_1(A),L_\infty(A)\right)^q}_{=\int_0^t f^*(\tau)\,\mathrm{d}\tau\ \ge\ t\ f^*(t)}\frac{\mathrm{d}t}{t} \ge \int_0^\infty t^{(1-\theta)q}\ f^*(t)^q\,\frac{\mathrm{d}t}{t} = \left\|f|L_{\frac{1}{1-\theta},q}(A)\right\|^q$$

$\boxed{q=\infty}$

$$\left\| f | \big(L_1(A), L_\infty(A)\big)_{\theta,\infty} \right\| = \sup_{0<t<\infty} t^{-\theta} \overbrace{K\left(t, f; L_1(A), L_\infty(A)\right)}^{\geq\ t\ f^*(t)} \geq \sup_{0<t<\infty} t^{1-\theta}\ f^*(t) \ = \ \left\| f | L_{\frac{1}{1-\theta},\infty}(A) \right\|$$

$$\Longrightarrow \quad \big(L_1(A), L_\infty(A)\big)_{\theta,q} \ \hookrightarrow \ L_{\frac{1}{1-\theta},q}(A)\ , \ \ 1 \leq q \leq \infty$$

<u>3. Schritt</u> : zeigen $\quad L_{\frac{1}{1-\theta},q}(A) \ \hookrightarrow \ \big(L_1(A), L_\infty(A)\big)_{\theta,q};$ sei zunächst $\boxed{q<\infty}$

$$\begin{aligned}
\left\| f | \big(L_1(A), L_\infty(A)\big)_{\theta,q} \right\| \quad &= \quad \left(\int_0^\infty t^{-\theta q} K\left(t, f; L_1(A), L_\infty(A)\right)^q \frac{\mathrm{d}t}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\underset{(3)}{=} \quad \left(\int_0^\infty t^{-\theta q} \underbrace{\left(\int_0^t f^*(\tau)\ \mathrm{d}\tau \right)^q}_{K(t,f;L_1(A),L_\infty(A))^q} \frac{\mathrm{d}t}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\underset{\tau\,=\,st}{=} \quad \left(\int_0^\infty t^{(1-\theta)q} \left(\int_0^1 f^*(st)\,\mathrm{d}s \right)^q \frac{\mathrm{d}t}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\underset{28}{\leq} \quad \int_0^1 \left(\int_0^\infty t^{(1-\theta)q}\ f^*(st)^q\ \frac{\mathrm{d}t}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \mathrm{d}s \\
&\underset{t\,=\,\frac{\tau}{s}}{=} \quad \int_0^1 s^{-(1-\theta)} \underbrace{\left(\int_0^\infty \tau^{(1-\theta)q}\ f^*(\tau)^q\ \frac{\mathrm{d}\tau}{\tau} \right)^{\frac{1}{q}}}_{\left\| f | L_{\frac{1}{1-\theta},q}(A) \right\|} \mathrm{d}s \\
&= \quad \left\| f | L_{\frac{1}{1-\theta},q}(A) \right\| \underbrace{\int_0^1 s^{-(1-\theta)}\,\mathrm{d}s}_{=\ \theta^{-1}} \quad \leq \quad c_\theta \ \left\| f | L_{\frac{1}{1-\theta},q}(A) \right\|
\end{aligned}$$

$\boxed{q=\infty}$

$$\begin{aligned}
\left\| f | \big(L_1(A), L_\infty(A)\big)_{\theta,\infty} \right\| \quad &= \quad \sup_{0<t<\infty} t^{-\theta} \overbrace{\int_0^t f^*(\tau)\ \mathrm{d}\tau}^{K(t,f;L_1(A),L_\infty(A)),\ (3)} \quad \underset{\tau\,=\,st}{=} \quad \sup_{0<t<\infty} t^{1-\theta} \int_0^1 f^*(st)\,\mathrm{d}s \\
&\leq \quad \int_0^1 \sup_{0<t<\infty} t^{1-\theta}\ f^*(st)\,\mathrm{d}s \quad \underset{t\,=\,\frac{\tau}{s}}{=} \quad \int_0^1 s^{-(1-\theta)} \underbrace{\sup_{0<\tau<\infty} \tau^{1-\theta}\ f^*(\tau)}_{\left\| f | L_{\frac{1}{1-\theta},\infty}(A) \right\|} \mathrm{d}s \\
&= \quad C_\theta \ \left\| f | L_{\frac{1}{1-\theta},\infty}(A) \right\|
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad L_{\frac{1}{1-\theta},q}(A) \ \hookrightarrow \ \big(L_1(A), L_\infty(A)\big)_{\theta,q}\ , \ \ 1 \leq q \leq \infty \qquad \square$$

[28] verallgemeinerte Dreiecksungleichung für Integrale, [HLP52, Thm. 202, p. 148]

Folgerung 1 *Seien* A *ein Banach-Raum,* $1 < p_0, p_1 < \infty$, $p_0 \neq p_1$, $1 \leq q_0, q_1, q \leq \infty$, *und* $0 < \eta < 1$. *Dann gilt für* $\frac{1}{p} = \frac{1-\eta}{p_0} + \frac{\eta}{p_1}$

$$\Big(L_{p_0,q_0}(A), L_{p_1,q_1}(A)\Big)_{\eta,q} \;=\; L_{p,q}(A) \;,$$

d.h. insbesondere

$$\Big(L_{p_0}(A), L_{p_1}(A)\Big)_{\eta,p} \;=\; L_p(A) \;.$$

Beweis : verwenden Satz 7.2 und Satz 1 mit $A_0 = L_1(A)$, $A_1 = L_\infty(A)$, θ_i so, dass $p_i = \frac{1}{1-\theta_i}$ gilt, d.h. $\theta_i = 1 - \frac{1}{p_i}$, $i = 0, 1$

$$\underset{\text{Satz 1}}{\Longrightarrow} \quad (A_0, A_1)_{\theta_i, q_i} \;=\; \Big(L_1(A), L_\infty(A)\Big)_{1-\frac{1}{p_i}, q_i} \;=\; L_{p_i,q_i}(A), \quad 1 \leq q_i \leq \infty, \quad i = 0, 1$$

$$\underset{\text{Satz 7.2}}{\Longrightarrow} \Big(\underbrace{\big(L_1(A), L_\infty(A)\big)_{1-\frac{1}{p_0}, q_0}}_{L_{p_0,q_0}(A)}, \underbrace{\big(L_1(A), L_\infty(A)\big)_{1-\frac{1}{p_1}, q_1}}_{L_{p_1,q_1}(A)} \Big)_{\eta,q} = \Big(L_1(A), L_\infty(A)\Big)_{\theta,q} \underset{\text{Satz 1}}{=} L_{\frac{1}{1-\theta},q}(A)$$

mit

$$\theta := (1-\eta) \underbrace{\left(1 - \frac{1}{p_0}\right)}_{\theta_0} + \eta \underbrace{\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)}_{\theta_1} = 1 \underbrace{- \frac{1-\eta}{p_0} - \frac{\eta}{p_1}}_{-\frac{1}{p}} = 1 - \frac{1}{p} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{1-\theta} = p$$

$\square$

Bemerkung : als Interpolationsraum ist $L_{\frac{1}{1-\theta},q}(A) = (L_1(A), L_\infty(A))_{\theta,q}$ Banachraum (mit $\| \cdot \,|\, (L_1(A), L_\infty(A))_{\theta,q} \|$), sonst ist $\| \cdot \,| L_{\frac{1}{1-\theta},q}(A) \|$ i.a. nur Quasi-Norm

10 Sobolev- und Besov-Räume

Wiederholung (*siehe auch Abschnitt 2*)

$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *Schwartz*-Raum, $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ ... lineare Funktionale auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$;

Multiindizes : $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$, $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$, $\mathrm{D}^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$, $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \cdots \xi_n^{\alpha_n}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$

Fourier-Transformation :

$$(\mathcal{F}\varphi)(\xi) \;=\; \widehat{\varphi}(\xi) \;:=\; (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi}\, \varphi(x)\, \mathrm{d}x \;, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \; \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \quad \text{mit} \quad x\xi = \sum_{k=1}^n x_k \xi_k$$

- $\left(\mathcal{F}^{-1}\varphi\right)(\xi) \;=\; \overset{\vee}{\varphi}(\xi) \;:=\; (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi}\, \varphi(x)\, \mathrm{d}x \;, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$
- $\mathcal{F}, \mathcal{F}^{-1} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \quad \mathcal{F}, \mathcal{F}^{-1} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), \quad \mathcal{F}, \mathcal{F}^{-1} : L_2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L_2(\mathbb{R}^n)$ unitär
- $\mathrm{D}^\alpha\, (\mathcal{F}\varphi)(\xi) \;=\; (-i)^{|\alpha|}\, \mathcal{F}\left(x^\alpha \varphi(x)\right), \quad \xi^\alpha\, (\mathcal{F}\varphi)(\xi) \;=\; (-i)^{|\alpha|}\, \mathcal{F}\left(\mathrm{D}^\alpha \varphi(x)\right)$

Definition 1 (Sobolev[29]-Räume)
(i) *Seien* $1 \le p < \infty$, $k \in \mathbb{N}_0$, *dann ist*

$$W_p^k(\mathbb{R}^n) := \left\{ f \in L_p(\mathbb{R}^n) \;:\; \left\| f | W_p^k(\mathbb{R}^n) \right\| := \sum_{|\alpha| \le k} \| \mathrm{D}^\alpha f | L_p(\mathbb{R}^n) \| < \infty \right\}.$$

(ii) *Seien* $1 < p < \infty$, $s \in \mathbb{R}$, *dann ist*

$$H_p^s(\mathbb{R}^n) := \left\{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \;:\; \| f | H_p^s(\mathbb{R}^n) \| := \left\| \mathcal{F}^{-1} \left(1 + |\xi|^2\right)^{\frac{s}{2}} \mathcal{F} f | L_p(\mathbb{R}^n) \right\| < \infty \right\}.$$

Bemerkung :

- W_p^k ... „klassische" Sobolev-Räume, H_p^s ... Sobolev-Räume *gebrochener Glattheit*, Bessel[30]-Potential-Räume, $W_p^0(\mathbb{R}^n) = H_p^0(\mathbb{R}^n) = L_p(\mathbb{R}^n)$
- $f \in L_p(\mathbb{R}^n) \implies \mathrm{D}^\alpha f$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ ... „schwache Ableitung" (*im Sinne der Distributionen erklärt*) : $(\mathrm{D}^\alpha f) \underbrace{(\varphi)}_{\in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) = C_0^\infty(\mathbb{R}^n)} := (-1)^{|\alpha|} \underbrace{f}_{\in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)} \underbrace{(\mathrm{D}^\alpha \varphi)}_{\in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) = C_0^\infty(\mathbb{R}^n)}$

$$\iff \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} (\mathrm{D}^\alpha f)(x) \varphi(x) \, \mathrm{d}x}_{(\mathrm{D}^\alpha f)(\varphi)} \underset{\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)}{=} (-1)^{|\alpha|} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \left(\mathrm{D}^\alpha \varphi\right)(x) \, \mathrm{d}x}_{f(\mathrm{D}^\alpha \varphi)}$$

- *Motivation* : partielle Differentialgleichungen, z.B. gesucht u mit $(\mathrm{id} - \Delta)^m u = f$, f gegeben $\dashrightarrow$ welche *„Qualität"* der Lösung u ist entsprechend der Vorgabe f zu erwarten ($f \in L_p \dashrightarrow$ suchen $u \in W_p^{2m}$)

Sobolev-Räume : Zusammenhang $W_p^k \longleftrightarrow H_p^s$

sei $f \in W_2^k(\mathbb{R}^n) \underset{\text{Def. 1 (i)}}{\implies} \left\| f | W_2^k(\mathbb{R}^n) \right\| = \sum_{|\alpha| \le k} \| \mathrm{D}^\alpha f | L_2(\mathbb{R}^n) \| < \infty$

Formel von *Plancherel / Parseval* : $\| \mathrm{D}^\alpha f | L_2(\mathbb{R}^n) \| = \| \mathcal{F}(\mathrm{D}^\alpha f) | L_2(\mathbb{R}^n) \| = \| \xi^\alpha \mathcal{F} f(\xi) | L_2(\mathbb{R}^n) \|$, $|\alpha| \le k$

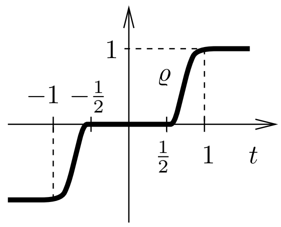
$$|\xi^\alpha| = \prod_{i=1}^n \underbrace{|\xi_i|}_{\le |\xi|}{}^{\alpha_i} \;\le\; |\xi|^{|\alpha|} \;\le\; \left(1 + |\xi|^2\right)^{\frac{k}{2}}, \quad |\alpha| \le k, \quad \xi \in \mathbb{R}^n$$

$$\begin{aligned}
\implies \quad \left\| f | W_2^k(\mathbb{R}^n) \right\| &= \sum_{|\alpha| \le k} \| \xi^\alpha \mathcal{F} f(\xi) | L_2(\mathbb{R}^n) \| \\
&\le c_{n,k} \left\| \left(1 + |\xi|^2\right)^{\frac{k}{2}} \mathcal{F} f(\xi) | L_2(\mathbb{R}^n) \right\| \\
&\underset{\text{Plancherel}}{=} c_{n,k} \left\| \mathcal{F}^{-1} \left(1 + |\xi|^2\right)^{\frac{k}{2}} \mathcal{F} f(\xi) | L_2(\mathbb{R}^n) \right\| = c_{n,k} \left\| f | H_2^k(\mathbb{R}^n) \right\| \qquad (1)
\end{aligned}$$

[29] Sergei Lvovich Sobolev (* 6.10.1908 St. Petersburg † 3.1.1989 Leningrad)
[30] Friedrich Wilhelm Bessel (* 22.7.1784 Minden † 17.3.1846 Königsberg)

sei $\varrho \, : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$, $\varrho \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\varrho(s) = -\varrho(-s)$, $s \in \mathbb{R}$, mit

$$\varrho(t) := \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & , & t \leq \frac{1}{2} \\ 1 & , & t \geq 1 \end{array} \right\} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{k}{2}}}{\underbrace{1 + \sum_{i=1}^n \varrho^k(\xi_i)\xi_i^k}_{\geq 0,\ \varrho(\xi_i)\xi_i \geq 0}} \underset{\substack{|\xi| \downarrow 0 \\ |\xi| \to \infty}}{\longrightarrow} 1$$



$$\Longrightarrow \quad \left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{k}{2}} \leq C_{n,k}\Big(1 + \sum_{i=1}^n \varrho^k(\xi_i)\xi_i^k\Big), \quad \xi \in \mathbb{R}^n$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad \left\|f|H_2^k(\mathbb{R}^n)\right\| &\underset{\text{Def. 1 (ii)}}{=} \left\|\mathcal{F}^{-1}\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{k}{2}} \mathcal{F}f(\xi)|L_2(\mathbb{R}^n)\right\| \underset{\text{Plancherel}}{=} \left\|\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{k}{2}} \mathcal{F}f(\xi)|L_2(\mathbb{R}^n)\right\| \\
&= \left\| \underbrace{\frac{\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{k}{2}}}{1+\sum_{i=1}^n \varrho^k(\xi_i)\xi_i^k}}_{\leq C_{n,k}} \Big(1 + \sum_{i=1}^n \varrho^k(\xi_i)\xi_i^k\Big)\mathcal{F}f(\xi)\Big| L_2(\mathbb{R}^n)\right\| \\
&\leq c\left\|\Big(1+\sum_{i=1}^n \varrho^k(\xi_i)\xi_i^k\Big)\mathcal{F}f(\xi)\Big|L_2(\mathbb{R}^n)\right\| \\
&\leq c\left(\|\mathcal{F}f|L_2(\mathbb{R}^n)\| + \sum_{i=1}^n\left\|\underbrace{\varrho^k(\xi_i)}_{|\cdot|\leq 1}\underbrace{\xi_i^k\mathcal{F}f(\xi)}_{(-i)^k\mathcal{F}\left(\frac{\partial^k f}{\partial x_i^k}\right)}\Big|L_2(\mathbb{R}^n)\right\|\right) \\
&\underset{\text{Plancherel}}{\leq} c\left(\|\mathcal{F}f|L_2(\mathbb{R}^n)\| + \sum_{i=1}^n\left\|\frac{\partial^k f}{\partial x_i^k}\Big|L_2(\mathbb{R}^n)\right\|\right) \\
&\leq c\sum_{|\alpha|\leq k}\|\mathrm{D}^\alpha f|L_2(\mathbb{R}^n)\| = c\left\|f|W_2^k(\mathbb{R}^n)\right\|
\end{aligned}$$

$$\underset{(1)}{\Longrightarrow} \left\|f|W_2^k(\mathbb{R}^n)\right\| \sim \left\|f|H_2^k(\mathbb{R}^n)\right\| \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{W_2^k(\mathbb{R}^n) = H_2^k(\mathbb{R}^n), \quad k \in \mathbb{N}_0}$$

__wesentlich__ : Formel von Plancherel ⇢ was passiert für $p \neq 2$?

$$\begin{aligned}
p \neq 2 \quad \Longrightarrow \quad \left\|f|W_p^k(\mathbb{R}^n)\right\| &= \sum_{|\alpha|\leq k}\left\|\mathrm{D}^\alpha\left(\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}f\right)|L_p(\mathbb{R}^n)\right\| = \sum_{|\alpha|\leq k}\left\|\mathcal{F}^{-1}\left(\xi^\alpha\mathcal{F}f(\xi)\right)|L_p(\mathbb{R}^n)\right\| \\
&\overset{?}{\leq} C_{n,k}\left\|\mathcal{F}^{-1}\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{k}{2}}\mathcal{F}f(\xi)|L_p(\mathbb{R}^n)\right\| \sim \left\|f|H_p^k(\mathbb{R}^n)\right\|
\end{aligned}$$

⇢ wann gilt $\quad \left\|\mathcal{F}^{-1}\xi^\alpha\mathcal{F}f(\xi)|L_p(\mathbb{R}^n)\right\| \leq C_{n,k}\left\|\mathcal{F}^{-1}\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{k}{2}}\mathcal{F}f(\xi)|L_p(\mathbb{R}^n)\right\|$

$$\Longleftrightarrow \quad \left\|\mathcal{F}^{-1}\underbrace{\frac{\xi^\alpha}{\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{k}{2}}}}_{=:m(\xi)}\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{k}{2}}\mathcal{F}f(\xi)|L_p(\mathbb{R}^n)\right\| \leq C_{n,k}\left\|\mathcal{F}^{-1}\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{k}{2}}\mathcal{F}f(\xi)|L_p(\mathbb{R}^n)\right\|$$

$$\Longleftrightarrow \quad \left\|\mathcal{F}^{-1}m(\xi)\mathcal{F}\underbrace{\mathcal{F}^{-1}\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{k}{2}}\mathcal{F}f(\xi)}_{g(\xi)}|L_p(\mathbb{R}^n)\right\| \leq C_{n,k}\left\|\underbrace{\mathcal{F}^{-1}\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{k}{2}}\mathcal{F}f(\xi)}_{g\xi)}|L_p(\mathbb{R}^n)\right\|$$

$$\Longleftrightarrow \quad \left\|\mathcal{F}^{-1}\, m\, \mathcal{F}\, g|L_p(\mathbb{R}^n)\right\| \leq C_{n,k}\ \|g|L_p(\mathbb{R}^n)\|$$

Definition 2 *Seien* $m \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p \le \infty$. *Dann heißt* m Fourier-Multiplikator für $L_p(\mathbb{R}^n)$, $m \in \mathfrak{M}(L_p)$, *falls ein* $c > 0$ *existiert, so dass für alle* $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ *gilt*

$$\left\| \mathcal{F}^{-1} m \, \mathcal{F} f | L_p(\mathbb{R}^n) \right\| \le c \, \| f | L_p(\mathbb{R}^n) \| .$$

Satz 1 (Michlin[31]-Hörmander[32])
Seien $1 < p < \infty$, $m \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$. *Dann ist* $m \in \mathfrak{M}(L_p)$, *falls gilt*

$$\sup_{|\alpha| \le 1 + [\frac{n}{2}]} \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} |\xi|^{|\alpha|} \, |\mathrm{D}^\alpha m(\xi)| < \infty .$$

Beweis : [Tri78, Thm. 2.2.4, Bem. 2.2.4/4], [BL76, Thm. 6.1.6] □

Satz 2 *Seien* $1 < p < \infty$, $k \in \mathbb{N}_0$, $s \in \mathbb{R}$. *Dann sind* $W_p^k(\mathbb{R}^n)$ *und* $H_p^s(\mathbb{R}^n)$ *Banach-Räume, für die zusätzlich gilt*

$$W_p^k(\mathbb{R}^n) = H_p^k(\mathbb{R}^n) , \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Beweis : o.B.d.A. $k \in \mathbb{N}$, verwenden Argumentation analog zu $p = 2$ und Satz 1 mit

$$m_{\alpha,k}(\xi) := \frac{\xi^\alpha}{(1+|\xi|^2)^{\frac{k}{2}}} , \quad |\alpha| \le k, \qquad \text{bzw.} \qquad \widetilde{m}_{\varrho,k}(\xi) := \frac{(1+|\xi|^2)^{\frac{k}{2}}}{1 + \sum_{i=1}^n \varrho^k(\xi_i)\xi_i^k}$$

$$\underset{\text{Satz 1}}{\Longrightarrow} \qquad \underline{\text{g.z.z.}} : \quad \sup_{|\beta| \le 1+[\frac{n}{2}]} \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} |\xi|^{|\beta|} \left| \mathrm{D}^\beta m_{\alpha,k}(\xi) \right| < \infty , \quad |\alpha| \le k \tag{2}$$

$$\sup_{|\beta| \le 1+[\frac{n}{2}]} \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} |\xi|^{|\beta|} \left| \mathrm{D}^\beta \widetilde{m}_{\varrho,k}(\xi) \right| < \infty \tag{3}$$

$$|\beta| = 0 \quad : \quad \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} |m_{\alpha,k}(\xi)| \le 1 < \infty$$

$$|\beta| = 1 \quad : \quad |\xi| \left| \frac{\partial}{\partial \xi_j} \underbrace{\left(\frac{\xi^\alpha}{(1+|\xi|^2)^{\frac{k}{2}}} \right)}_{m_{\alpha,k}(\xi)} \right| = \frac{|\xi|}{(1+|\xi|^2)^{\frac{k}{2}+1}} \underbrace{\left| \overbrace{\alpha_j \xi_1^{\alpha_1} \cdots \xi_j^{\alpha_j - 1} \cdots \xi_n^{\alpha_n}}^{0, \ \alpha_j = 0} (1+|\xi|^2) - k \, \xi^\alpha \xi_j \right|}_{\le C_{\alpha,k} \ |\xi|^{|\alpha|+1}}$$

$$\Longrightarrow \quad \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} |\xi| \left| \frac{\partial}{\partial \xi_j} \left(\frac{\xi^\alpha}{(1+|\xi|^2)^{\frac{k}{2}}} \right) \right| \le C_{\alpha,k} \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \underbrace{\frac{|\xi|^{|\alpha|+2}}{(1+|\xi|^2)^{\frac{k}{2}+1}}}_{c'_{n,k}, \ |\alpha| \le k} < \infty$$

$$\beta \in \mathbb{N}_0^n \quad \underset{\text{analog}}{\Longrightarrow} \quad \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} |\xi|^{|\beta|} \left| \mathrm{D}^\beta m_{\alpha,k}(\xi) \right| \le C_{\alpha,\beta,k} \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \underbrace{\frac{|\xi|^{|\alpha|+2|\beta|}}{(1+|\xi|^2)^{\frac{k}{2}+|\beta|}}}_{C_{n,k}, \ |\alpha| \le k} < \infty \quad \Longleftrightarrow \quad (2)$$

[31]Solomon Grigoriewitsch Michlin (* 1908 † 30.8.1990 St. Petersburg)
[32]Lars Hörmander (* 24.1.1931 Mjällby/Schweden)

$$|\beta| = 0 : \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} |\widetilde{m}_{\varrho,k}(\xi)| \leq C_{n,k} < \infty$$

$$|\beta| = 1 : \left|\frac{\partial}{\partial \xi_j} \underbrace{\frac{\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{k}{2}}}{1+\sum\limits_{i=1}^n \varrho^k(\xi_i)\xi_i^k}}_{\widetilde{m}_{\varrho,k}(\xi)}\right| \leq \frac{\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{k}{2}-1}}{\left(1+\sum\limits_{i=1}^n \varrho^k(\xi_i)\xi_i^k\right)^2}\Bigg[\underbrace{2|\xi_j|\overbrace{\left(1+\sum_{i=1}^n \varrho^k(\xi_i)\xi_i^k\right)}^{\leq c_1 \left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{k}{2}}}}_{\leq c_5 \ (1+|\xi|^2)^{\frac{k}{2}+\frac{1}{2}}} +$$

$$\underbrace{\left(1+|\xi|^2\right)\underbrace{\left(\underbrace{k\left|\varrho^{k-1}(\xi_j)\right|\overbrace{\left|\varrho'(\xi_j)\right|}^{0,|\xi_j|>1}|\xi_j|^k}_{\leq c_2} + k\left|\varrho^k(\xi_j)\right||\xi_j|^{k-1}\right)}_{\leq c_3 \ |\xi_j|^{k-1}}}_{\leq c_4 \ (1+|\xi|^2)^{\frac{k}{2}+\frac{1}{2}}}\Bigg]$$

$$\Longrightarrow \quad \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} |\xi| \left|\frac{\partial}{\partial\xi_j}\frac{\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{k}{2}}}{1+\sum\limits_{i=1}^n \varrho^k(\xi_i)\xi_i^k}\right| \leq c_{\varrho,n,k} \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} \frac{|\xi| \ \left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{k}{2}-1+\frac{k}{2}+\frac{1}{2}}}{\left(1+\sum\limits_{i=1}^n \varrho^k(\xi_i)\xi_i^k\right)^2}$$

$$\leq C_{\varrho,n,k} \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} \underbrace{\left(\frac{\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{k}{2}}}{1+\sum\limits_{i=1}^n \varrho^k(\xi_i)\xi_i^k}\right)^2}_{\leq c'\widetilde{m}^2_{\varrho,k}(\xi) \leq C'_{\varrho,n,k}} \leq C < \infty$$

$$\beta \in \mathbb{N}_0^n \quad \underset{\text{analog}}{\Longrightarrow} \quad \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} |\xi|^{|\beta|} \left|\mathrm{D}^\beta \widetilde{m}_{\varrho,k}(\xi)\right| \leq C_{\varrho,\beta,k} \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} \widetilde{m}^{|\beta|}_{\varrho,k}(\xi) < \infty \quad \Longleftrightarrow \quad (3)$$

□

Bemerkung : „*Lift*-Operator" :

$$I_\sigma f := \mathcal{F}^{-1}\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{\sigma}{2}}\mathcal{F}f, \quad f\in S'(\mathbb{R}^n), \quad \sigma\in\mathbb{R} \tag{4}$$

$$I_\sigma : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n),\ (I_\sigma)^{-1} = I_{-\sigma} \quad \Longleftrightarrow \quad I_\sigma \circ I_{-\sigma} = I_{-\sigma}\circ I_\sigma = \mathrm{id}_{\mathcal{S}'}, \ \sigma\in\mathbb{R}$$

$$I_\sigma : H_p^s(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H_p^{s-\sigma}(\mathbb{R}^n), \quad s,\sigma\in\mathbb{R}, \quad I_\sigma\left(H_p^s(\mathbb{R}^n)\right) = H_p^{s-\sigma}(\mathbb{R}^n) \tag{5}$$

speziell : $\left\|f|H_p^s(\mathbb{R}^n)\right\| = \|I_s f|L_p(\mathbb{R}^n)\| \quad \Longleftrightarrow \quad H_p^s(\mathbb{R}^n) = I_{-s}\left(L_p(\mathbb{R}^n)\right)$

$\sigma = 2m \quad \Longrightarrow \quad \left(1+|\xi|^2\right)^m \mathcal{F}f = \mathcal{F}\left((\mathrm{id}-\Delta)^m f\right) \quad \Longrightarrow \quad I_{2m}f = (\mathrm{id}-\Delta)^m f$, d.h.
$f\in H_p^s(\mathbb{R}^n) \quad \Longleftrightarrow \quad (\mathrm{id}-\Delta)^m f \in H_p^{s-2m}(\mathbb{R}^n) \dashrightarrow I_\sigma$ „liftet" Glattheit s

Fourier-analytischer Zugang zu Funktionenräumen, glatte Zerlegungen

Seien $s\in\mathbb{R},\ f\in H_p^s(\mathbb{R}^n),\ B_j := \left\{x\in\mathbb{R}^n : |x| < 2^j\right\},\ j\in\mathbb{N}_0,\ B_{-1} := \emptyset,$ betrachten Kreisringe

$$\mathcal{K}_j := B_j \setminus B_{j-1} = \left\{x\in\mathbb{R}^n : 2^{j-1} \leq |x| < 2^j\right\}, \quad j\in\mathbb{N}_0$$

$$\Longrightarrow \quad \bigcup_{j\in\mathbb{N}_0} \mathcal{K}_j = \mathbb{R}^n, \quad \mathcal{K}_j \cap \mathcal{K}_\ell = \emptyset,\ j\neq\ell$$

$$
\begin{aligned}
\|f|H_2^s(\mathbb{R}^n)\| &= \left\|\mathcal{F}^{-1}\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{s}{2}}\mathcal{F}f|L_2(\mathbb{R}^n)\right\| \underset{\text{Plancherel}}{=} \left\|\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{s}{2}}\mathcal{F}f|L_2(\mathbb{R}^n)\right\| \\
&= \left(\sum_{j=0}^{\infty}\int_{K_j}\left(1+|\xi|^2\right)^s|\mathcal{F}f(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi\right)^{\frac12} = \left(\sum_{j=0}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^n}\chi_{K_j}(\xi)\underbrace{\left(1+|\xi|^2\right)^s}_{\sim\,2^{2js}}|\mathcal{F}f(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi\right)^{\frac12} \\
&\sim \left(\sum_{j=0}^{\infty}2^{2js}\underbrace{\int_{\mathbb{R}^n}\left|\chi_{K_j}(\xi)\mathcal{F}f(\xi)\right|^2\mathrm{d}\xi}_{\left\|\chi_{K_j}\mathcal{F}f|L_2(\mathbb{R}^n)\right\|^2}\right)^{\frac12} \underset{\text{Plancherel}}{=} \left(\sum_{j=0}^{\infty}2^{2js}\left\|\mathcal{F}^{-1}\chi_{K_j}\mathcal{F}f|L_2(\mathbb{R}^n)\right\|^2\right)^{\frac12} \\
&= \left\|\left\{2^{js}\,\mathcal{F}^{-1}\chi_{K_j}\mathcal{F}f\right\}_{j=0}^{\infty}\left|\ell_2\big(L_2(\mathbb{R}^n)\big)\right.\right\| \underset{\substack{\text{Def. 5.1}\\ A=L_2(\mathbb{R}^n)}}{=} \left\|\left\{\mathcal{F}^{-1}\chi_{K_j}\mathcal{F}f\right\}_{j=0}^{\infty}\left|\ell_2^s\big(L_2(\mathbb{R}^n)\big)\right.\right\|
\end{aligned}
$$

$\boxed{\textit{Frage}}$: $p\neq 2$, $\chi_{K_j} \dashrightarrow \varphi_j\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ $\underset{\text{Satz[33] von Paley[34]-Wiener[35]-Schwartz}}{\Longrightarrow}$ $\mathcal{F}^{-1}\varphi_j\mathcal{F}f$ glatte Funktionen für $f\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

Glatte (dyadische) Zerlegung der 1

$\chi_{K_j} \dashrightarrow \varphi_j\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ $\Longrightarrow$ etwas Überlappung nötig, $\mathcal{K}_\ell \dashrightarrow A_\ell$ dyadische Kreisringe,

$$A_\ell=\left\{x\in\mathbb{R}^n: 2^{\ell-1}<|x|<2^{\ell+1}\right\},\quad \ell\in\mathbb{N},\quad A_0=\{x\in\mathbb{R}^n:|x|<2\}$$

Definition 3 $\{\varphi_j\}_{j=0}^\infty\subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ *heißt* glatte (dyadische) Zerlegung der 1, $\{\varphi_j\}_{j=0}^\infty\in\Phi(\mathbb{R}^n)$, *falls*

(i) $\operatorname{supp}\varphi_j\subset\overline{A_j}$, $\quad j\in\mathbb{N}_0$,

(ii) $\forall\,\gamma=(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)\in\mathbb{N}_0^n\quad\exists\, c_\gamma>0\quad\forall\, x\in\mathbb{R}^n\ : 2^{j|\gamma|}\,|\mathrm{D}^\gamma\varphi_j(x)|\ \le\ c_\gamma$

(iii) $\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty}\varphi_j(x)=1,\qquad x\in\mathbb{R}^n.$

$\boxed{\textbf{Beispiel}}$: Sei $\varphi\in S(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{supp}\varphi\subset\{y\in\mathbb{R}^n:|y|<2\}$, $\varphi(x)=1$, $|x|\le 1$; setzen $\varphi_0:=\varphi$, $\varphi_j(x)=\varphi(2^{-j}x)-\varphi(2^{-j+1}x)$, $j\in\mathbb{N}$ $\Longrightarrow$ $\{\varphi_j\}_{j=0}^\infty\in\Phi(\mathbb{R}^n)$

Definition 4 (Besov[36]-Räume) *Seien* $s\in\mathbb{R}$, $0<p,q\le\infty$, *und* $\{\varphi_j\}_{j=0}^\infty\in\Phi(\mathbb{R}^n)$. *Dann ist* $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ *die Menge aller* $f\in S'(\mathbb{R}^n)$, *für die*

$$\left\|f|B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)\right\| = \begin{cases}\left(\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty}2^{jsq}\left\|\mathcal{F}^{-1}\varphi_j\mathcal{F}f|L_p(\mathbb{R}^n)\right\|^q\right)^{1/q} & ,\quad q<\infty\\ \displaystyle\sup_{j\in\mathbb{N}_0}2^{js}\left\|\mathcal{F}^{-1}\varphi_j\mathcal{F}f|L_p(\mathbb{R}^n)\right\| & ,\quad q=\infty\end{cases}$$

endlich ist.

---

[33] $g(\xi)$ ganze analytische Funktion in $\mathbb{C}^n$ $\Longleftrightarrow$ $g(\xi)$ analytisch in $\mathbb{C}^n$, $\exists\, b\ge 0,\ c\ge 0\ \forall\,\xi\in\mathbb{R}^n\ :\ |g(\xi)|\le c\,e^{b|\xi|}$
Satz von Paley-Wiener-Schwartz : Sei $g(\xi)$ eine ganze analytische Funktion in $\mathbb{C}^n$. Dann gilt :

$$\exists\, f\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)\ :\operatorname{supp} f\subset K_r,\ g=\mathcal{F}f \iff \exists\, c>0, N\in\mathbb{N}\,\forall\,\xi\in\mathbb{C}^n\ :\ |g(\xi)|\ \le\ c\,(1+|\xi|)^N\ e^{r|\Im\mathrm{m}\,\xi|}$$

[34] Raymond Edward Alan Christopher Paley (* 7.1.1907 Bournemouth/England † 7.4.1933 Banff, Alberta/Canada)

[35] Norbert Wiener (* 26.11.1894 Columbia, Missouri/USA † 18.3.1964 Stockholm)

[36] Oleg Vladimirovich Besov (* 27.5.1933)

Bemerkung :

- lange Geschichte; Skala $B^s_{p,q}$ schließt u.a. Hölder-Zygmund-Räume ein
- „klassisch" : Charakterisierung über Ableitungen und Differenzen, z.B. für $1 < p \le \infty$, $s > 0$, $0 < q \le \infty$, $r \in \mathbb{N}$ mit $r > s$

$$\|f|B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)\| \quad \sim \quad \|f|L_p(\mathbb{R}^n)\| + \left(\int_0^{\frac{1}{2}} \left[t^{-s} \sup_{|h|\le t} \|\Delta^r_h f|L_p(\mathbb{R}^n)\|\right]^q \frac{\mathrm{d}t}{t}\right)^{1/q}$$

mit $(\Delta^1_h f)(x) := f(x+h) - f(x)$, $(\Delta^{m+1}_h f)(x) := \Delta^1_h(\Delta^m_h f)(x)$, $x, h \in \mathbb{R}^n$, $m \in \mathbb{N}$

- parallel dazu : $F^s_{p,q}$; systematisch in [Tri78], [Tri83], [Tri92b]

Satz 3 *Seien* $1 \le p \le \infty$, $1 \le q \le \infty$, $s \in \mathbb{R}$, *und* $\{\varphi_j\}_{j=0}^\infty \in \Phi(\mathbb{R}^n)$, $\{\psi_j\}_{j=0}^\infty \in \Phi(\mathbb{R}^n)$. *Dann sind* $\| \cdot |B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)\|^\varphi$ *und* $\| \cdot |B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)\|^\psi$ *äquivalente Normen in* $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$.

Beweis : Norm-Eigenschaften klar, $\left\|f|B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)\right\| = \left\|\{\mathcal{F}^{-1}\varphi_j\mathcal{F}f\}_{j=0}^\infty \left|\ell^s_q(L_p(\mathbb{R}^n))\right.\right\|$

$$\{\varphi_j\}_{j=0}^\infty, \{\psi_j\}_{j=0}^\infty \in \Phi(\mathbb{R}^n) \underset{\text{Def. 3 (i), (iii)}}{\Longrightarrow} \varphi_j(x) = \underbrace{\varphi_j(x) \sum_{\ell=0}^\infty \psi_\ell(x)}_{\ne 0,\ \ell-2<j<\ell+2} \underset{\psi_{-1} :\equiv 0}{=} \sum_{\ell=j-1}^{j+1} \varphi_j(x)\psi_\ell(x), \quad j \in \mathbb{N}_0$$

$$\underset{r=\ell-j,\ \mathcal{F},\ \mathcal{F}^{-1}}{\Longrightarrow} \quad \mathcal{F}^{-1}\varphi_j\mathcal{F}f = \sum_{r=-1}^{1} \mathcal{F}^{-1}\varphi_j\mathcal{F}\underbrace{\mathcal{F}^{-1}\psi_{r+j}\mathcal{F}f}_{g}$$

$$\underset{\text{Satz 1}}{\Longrightarrow} \quad \left\|\mathcal{F}^{-1}\varphi_j\mathcal{F}f|L_p(\mathbb{R}^n)\right\| \le c \sum_{r=-1}^{1} \left\|\overbrace{\mathcal{F}^{-1}\psi_{r+j}\mathcal{F}f}^{g}\,|L_p(\mathbb{R}^n)\right\|, \quad \text{falls}$$

$$\sup_{|\alpha| \le 1+[\frac{n}{2}]} \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} |\xi|^{|\alpha|}\, |\mathrm{D}^\alpha\varphi_j(\xi)| \le c < \infty$$

$$\{\varphi_j\}_{j=0}^\infty \in \Phi(\mathbb{R}^n) \underset{\text{Def. 3 (i), (ii)}}{\Longrightarrow} \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} |\xi|^{|\alpha|}\, |\mathrm{D}^\alpha\varphi_j(\xi)| = \sup_{2^{j-1}<|\xi|<2^{j+1}} \underbrace{|\xi|^{|\alpha|}}_{\le c_\alpha\ 2^{j|\alpha|}} \underbrace{|\mathrm{D}^\alpha\varphi_j(\xi)|}_{\le c'_\alpha\ 2^{-j|\alpha|}} \le C_\alpha$$

$$\Longrightarrow \sup_{|\alpha| \le 1+[\frac{n}{2}]} \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} |\xi|^{|\alpha|}\, |\mathrm{D}^\alpha\varphi_j(\xi)| \le c_n \Longrightarrow \left\|f|B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)\right\|^\varphi \le c \left\|f|B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)\right\|^\psi \qquad \square$$

Bemerkung :

- *insbesondere* : $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ Banach-Raum; für $0 < p, q < 1$ ⇢ Quasi-Banachraum
- Unabhängigkeit von der Auswahl der $\{\varphi_j\}_{j=0}^\infty \in \Phi(\mathbb{R}^n)$ (*im Sinne äquivalenter Normen*) $\Longrightarrow$ Rechtfertigung für Schreibweise $\|\cdot|B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)\|$ statt $\|\cdot|B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)\|^\varphi$
- $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $s \in \mathbb{R}$, $0 < p, q \le \infty$; $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dicht in $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ für $s \in \mathbb{R}$, $0 < p, q < \infty$

Lemma 1 *Seien* $s, \sigma \in \mathbb{R}$, $0 < p, q \le \infty$, I_σ *gegeben durch* (4). *Dann ist* I_σ *ein Isomorphismus von* $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ *auf* $B^{s-\sigma}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$.

B e w e i s : sei $\{\varphi_j\}_{j=0}^{\infty} \in \Phi(\mathbb{R}^n)$

$$\Longrightarrow \quad \left\|I_\sigma f|B^{s-\sigma}_{p,q}(\mathbb{R}^n)\right\| = \left\|\left\{\mathcal{F}^{-1}\varphi_j\mathcal{F}\underbrace{\left(\mathcal{F}^{-1}\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{\sigma}{2}}\mathcal{F}f\right)}_{I_\sigma f}\right\}\Big|\ell_q^{s-\sigma}\left(L_p(\mathbb{R}^n)\right)\right\|$$

$$= \left\|\left\{\mathcal{F}^{-1}\underbrace{\left(2^{-j\sigma}\ \varphi_j\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{\sigma}{2}}\right)}_{=:\psi_j}\mathcal{F}f\right\}\Big|\ell_q^{s}\left(L_p(\mathbb{R}^n)\right)\right\|$$

$\dashrightarrow$ $\{\psi_j\}_{j=0}^{\infty}$ „verallgemeinerte Zerlegung der 1“, d.h. $\{\psi_j\}_{j=0}^{\infty}$ erfüllt Def. 3 (i), (ii), und

$$\text{(iii)}' \quad \sum_{j=0}^{\infty}\psi_j(x) \geq c > 0, \quad x\in\mathbb{R}^n \quad \underset{\text{man kann zeigen}}{\Longrightarrow} \quad \left\|f|B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)\right\| \sim \left\|f|B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)\right\|^{\psi}$$

$$\Longrightarrow \quad \left\|I_\sigma f|B^{s-\sigma}_{p,q}(\mathbb{R}^n)\right\| = \left\|\left\{\mathcal{F}^{-1}\psi_j\mathcal{F}f\right\}\Big|\ell_q^s\left(L_p(\mathbb{R}^n)\right)\right\| \leq C\left\|f|B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)\right\|, \quad \sigma\in\mathbb{R} \quad (*)$$

$$\underset{I_{-\sigma}=I_\sigma^{-1}}{\Longrightarrow} \quad \left\|f|B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)\right\| = \left\|I_{-\sigma}\left(I_\sigma f\right)|B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)\right\| \underset{\substack{(*)\\ \sigma'=-\sigma}}{\leq} C\left\|I_\sigma f|B^{s-\sigma}_{p,q}(\mathbb{R}^n)\right\|$$

□

Satz 4 (Elementare Einbettungssätze)

(i) *Seien* $1<p<\infty,\ s\in\mathbb{R}$. *Dann gilt*

$$B^s_{p,1}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^s_p(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)\,, \tag{6}$$

insbesondere

$$B^0_{p,1}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L_p(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B^0_{p,\infty}(\mathbb{R}^n). \tag{7}$$

(ii) *Seien* $0<p,q_1,q_2\leq\infty,\ s_1,s_2\in\mathbb{R},\ s_1>s_2$. *Dann gilt*

$$B^{s_1}_{p,q_1}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B^{s_2}_{p,q_2}(\mathbb{R}^n)\,.$$

(iii) *Seien* $0<p\leq\infty,\ s\in\mathbb{R},\ 0<q_1\leq q_2\leq\infty$. *Dann gilt*

$$B^s_{p,q_1}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B^s_{p,q_2}(\mathbb{R}^n)\,.$$

B e w e i s : $\left\|f|B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)\right\| = \left\|\left\{\mathcal{F}^{-1}\varphi_j\mathcal{F}f\right\}_{j=0}^{\infty}\Big|\ell_q^s\left(L_p(\mathbb{R}^n)\right)\right\|$

$\boxed{\text{zu (iii)}}$: $0<q_1\leq q_2\leq\infty \quad\Longrightarrow\quad \ell^s_{q_1}\left(L_p(\mathbb{R}^n)\right)\hookrightarrow\ell^s_{q_2}\left(L_p(\mathbb{R}^n)\right) \quad\Longrightarrow\quad$ (iii)

$\boxed{\text{zu (ii)}}$: sei $f\in B^{s_1}_{p,q_1}(\mathbb{R}^n),\ s_1>s_2,\ 0<q_1,q_2\leq\infty$, o.B.d.A. $q_2<\infty$ ($q=\infty$ analog)

$$q_1\leq q_2 : \quad \left\|f|B^{s_2}_{p,q_2}(\mathbb{R}^n)\right\| = \left(\sum_{j=0}^{\infty}2^{js_2q_2}\left\|\mathcal{F}^{-1}\varphi_j\mathcal{F}f|L_p(\mathbb{R}^n)\right\|^{q_2}\right)^{\frac{1}{q_2}}$$

$$= \left(\sum_{j=0}^{\infty}2^{js_1q_2}\ \underbrace{2^{-j\overbrace{(s_1-s_2)}^{>0}q_2}}_{\leq 1}\ \left\|\mathcal{F}^{-1}\varphi_j\mathcal{F}f|L_p(\mathbb{R}^n)\right\|^{q_2}\right)^{\frac{1}{q_2}}$$

$$\underset{\substack{\ell_{q_1}\hookrightarrow\ell_{q_2}\\ q_1\leq q_2}}{\leq} \left(\sum_{j=0}^{\infty}2^{js_1q_1}\left\|\mathcal{F}^{-1}\varphi_j\mathcal{F}f|L_p(\mathbb{R}^n)\right\|^{q_1}\right)^{\frac{1}{q_1}} = \left\|f|B^{s_1}_{p,q_1}(\mathbb{R}^n)\right\|$$

$$q_1 > q_2 \ : \ \left\|f|B^{s_2}_{p,q_2}(\mathbb{R}^n)\right\| = \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{js_1q_2}\ 2^{-j(s_1-s_2)q_2}\ \left\|\mathcal{F}^{-1}\varphi_j\mathcal{F}f|L_p(\mathbb{R}^n)\right\|^{q_2}\right)^{\frac{1}{q_2}}$$

$$\underset{\substack{\text{Hölder}\\ r=\frac{q_1}{q_2}>1}}{\leq} \underbrace{\left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{js_1q_1}\ \left\|\mathcal{F}^{-1}\varphi_j\mathcal{F}f|L_p(\mathbb{R}^n)\right\|^{q_1}\right)^{\frac{1}{q_1}}}_{\left\|f|B^{s_1}_{p,q_1}(\mathbb{R}^n)\right\|} \underbrace{\left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j(s_1-s_2)\overbrace{\frac{q_1q_2}{q_1-q_2}}^{r'q_2}}\right)^{\frac{1}{q_2}-\frac{1}{q_1}}}_{\leq c}$$

$$\leq c\ \left\|f|B^{s_1}_{p,q_1}(\mathbb{R}^n)\right\|$$

$\boxed{\text{zu (i)}}$: ausreichend, (7) zu zeigen $\underset{\text{Lemma 1, (5)}}{\Longrightarrow}$ (6); seien $f \in B^0_{p,1}(\mathbb{R}^n)$, $\{\varphi_j\}_{j=0}^{\infty} \in \Phi(\mathbb{R}^n)$

$$\underset{\text{Def. 3 (iii)}}{\Longrightarrow} f = \sum_{j=0}^{\infty}\mathcal{F}^{-1}\varphi_j\mathcal{F}f \implies \|f|L_p(\mathbb{R}^n)\| \leq \sum_{j=0}^{\infty}\left\|\mathcal{F}^{-1}\varphi_j\mathcal{F}f|L_p(\mathbb{R}^n)\right\| = \left\|f|B^0_{p,1}(\mathbb{R}^n)\right\| \quad (*)$$

sei jetzt o.B.d.A. $\{\varphi_j\}_{j=0}^{\infty} \in \Phi(\mathbb{R}^n)$ so, dass $\varphi_0 := \varphi \in S(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{supp}\ \varphi \subset \{y \in \mathbb{R}^n : |y| < 2\}$, $\varphi(x) = 1$, $|x| \leq 1$, und $\varphi_1(x) := \varphi\left(\frac{x}{2}\right) - \varphi(x)$, $\varphi_j(x) := \varphi_1\left(2^{-j+1}x\right)$, $j \in \mathbb{N}$

sei $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$,

$$\mathcal{F}^{-1}\varphi_j\mathcal{F}f(x) = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi}\ \varphi_j(\xi)\underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} e^{-iy\xi}f(y)\,\mathrm{d}y}_{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\mathcal{F}f(\xi)}\,\mathrm{d}\xi$$

$$= (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-y)\xi}\ \varphi_j(\xi)\ \mathrm{d}\xi\ \mathrm{d}y$$

$$\underset{y\,=\,x-z}{=} (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} f(x-z)\int_{\mathbb{R}^n} e^{iz\xi}\ \varphi_j(\xi)\ \mathrm{d}\xi\ \mathrm{d}z$$

$$\underset{\xi\,=\,2^{j-1}\,\eta}{=} 2^{(j-1)n}\ (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} f(x-z)\underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} e^{iz2^{j-1}\eta}\ \underbrace{\varphi_j\left(2^{j-1}\eta\right)}_{\varphi_1(\eta)}\,\mathrm{d}\eta}_{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\ \mathcal{F}^{-1}\varphi_1(2^{j-1}z)}\ \mathrm{d}z$$

$$= 2^{(j-1)n}\ (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n} f(x-z)\ \mathcal{F}^{-1}\varphi_1\left(2^{j-1}z\right)\ \mathrm{d}z$$

$$\implies \left\|\mathcal{F}^{-1}\varphi_j\mathcal{F}f|L_p(\mathbb{R}^n)\right\| \leq c\ 2^{(j-1)n}\int_{\mathbb{R}^n}\underbrace{\|f(\cdot-z)|L_p(\mathbb{R}^n)\|}_{=\|f|L_p(\mathbb{R}^n)\|}\ \left|\mathcal{F}^{-1}\varphi_1\left(2^{j-1}z\right)\right|\,\mathrm{d}z$$

$$\underset{u\,=\,2^{j-1}z}{=} c\ \|f|L_p(\mathbb{R}^n)\|\underbrace{\int_{\mathbb{R}^n}\left|\mathcal{F}^{-1}\varphi_1(u)\right|\,\mathrm{d}u}_{\|\mathcal{F}^{-1}\varphi_1|L_1(\mathbb{R}^n)\|}$$

$$= c\ \|f|L_p(\mathbb{R}^n)\|\left\|\mathcal{F}^{-1}\varphi_1|L_1(\mathbb{R}^n)\right\|$$

$$\implies \left\|f|B^0_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)\right\| = \sup_{j\in\mathbb{N}_0}\ \left\|\mathcal{F}^{-1}\varphi_j\mathcal{F}f|L_p(\mathbb{R}^n)\right\|$$

$$\leq c\ \left\|\mathcal{F}^{-1}\varphi_1|L_1(\mathbb{R}^n)\right\|\ \|f|L_p(\mathbb{R}^n)\| = c'\ \|f|L_p(\mathbb{R}^n)\|$$

$$\underset{(*)}{\Longrightarrow} B^0_{p,1}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L_p(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B^0_{p,\infty}(\mathbb{R}^n) \qquad \square$$

Bemerkung :

- in (7) kann man auch $p = 1$ und $p = \infty$ zulassen
- ergänzend zu (ii), (iii) gilt für $0 < p_1 \le p_2 \le \infty$, $0 < q \le \infty$, $s_1 \ge s_2$ mit $s_1 - \frac{n}{p_1} \ge s_2 - \frac{n}{p_2}$

$$B^{s_1}_{p_1,q}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B^{s_2}_{p_2,q}(\mathbb{R}^n)$$

$\dashrightarrow$ zum Beweis *Nikol'skij*[37]*- Ungleichungen*[38] notwendig

11 Interpolation von Sobolev- und Besov-Räumen

$f \in B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) \quad \Longrightarrow \quad \|f|B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)\| = \left\| \{\mathcal{F}^{-1}\varphi_j\mathcal{F}f\}_{j=0}^\infty \middle| \ell^s_q(L_p(\mathbb{R}^n))\right\| < \infty$

betrachten Abbildung

$$S \ : \ B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \ell^s_q(L_p(\mathbb{R}^n)) \ , \quad Sf \ := \ \{\mathcal{F}^{-1}\varphi_j\mathcal{F}f\}_{j=0}^\infty$$

$\curvearrowright$ S linear, stetig, d.h. $S \in \mathcal{L}\left(B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n), \ell^s_q(L_p(\mathbb{R}^n))\right)$ $\dashrightarrow$ Koretraktion von $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ auf $\ell^s_q(L_p(\mathbb{R}^n))$

zugehörige Retraktion $R \in \mathcal{L}\left(\ell^s_q(L_p(\mathbb{R}^n)), B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)\right)$?

Def. 8.1, Satz 8.2 $\dashrightarrow$ Banachräume, betrachten deshalb jetzt nur noch $p, q \ge 1$

Lemma 1 *Seien* $s \in \mathbb{R}$, $1 \le p \le \infty$, $1 \le q \le \infty$, $\{\varphi_j\}_{j=0}^\infty, \{\psi_j\}_{j=0}^\infty \in \Phi(\mathbb{R}^n)$ *mit* $\psi_j(\xi) \equiv 1$ *für* $\xi \in \operatorname{supp} \varphi_j$, $j \in \mathbb{N}_0$. *Dann sind*

$$R_\psi \ : \ \ell^s_q(L_p(\mathbb{R}^n)) \longrightarrow B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) \ , \quad R\left(\{h_j\}_{j=0}^\infty\right) := \sum_{j=0}^\infty \mathcal{F}^{-1}\psi_j\mathcal{F}h_j \tag{1}$$

eine Retraktion in $\mathcal{L}\left(\ell^s_q(L_p(\mathbb{R}^n)), B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)\right)$ *und*

$$S_\varphi \ : \ B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \ell^s_q(L_p(\mathbb{R}^n)) \ , \quad Sf \ := \ \{\mathcal{F}^{-1}\varphi_j\mathcal{F}f\}_{j=0}^\infty \tag{2}$$

die zugehörige Koretraktion.

Beweis : klar : $S_\varphi \in \mathcal{L}\left(B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n), \ell^s_q(L_p(\mathbb{R}^n))\right)$, $\quad R_\psi \ : \ \ell^s_q(L_p(\mathbb{R}^n)) \longrightarrow B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ linear

<u>z.z.</u> : $R_\psi \ : \ \ell^s_q(L_p(\mathbb{R}^n)) \longrightarrow B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ stetig : sei $\{h_j\}_{j=0}^\infty \in \ell^s_q(L_p(\mathbb{R}^n))$, o.B.d.A. $q < \infty$

$$\Longrightarrow \quad \left\|R_\psi\left(\{h_k\}_{k=0}^\infty\right) \middle| B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)\right\| \underset{\{\varphi_j\} \in \Phi(\mathbb{R}^n)}{=} \left(\sum_{j=0}^\infty 2^{jsq} \Big\| \underbrace{\mathcal{F}^{-1}\varphi_j\mathcal{F}\Big(\sum_{k=0}^\infty \mathcal{F}^{-1}\psi_k\mathcal{F}h_k\Big)}_{\sum_{k=j-1}^{j+1}\mathcal{F}^{-1}\varphi_j\psi_k\mathcal{F}h_k} |L_p(\mathbb{R}^n)\Big\|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\underset{(**)}{\le} \quad c\left(\sum_{j=0}^\infty 2^{jsq}\,\|h_j|L_p(\mathbb{R}^n)\|^q\right)^{\frac{1}{q}} = c\left\|\{h_j\}_{j=0}^\infty \middle| \ell^s_q(L_p(\mathbb{R}^n))\right\|$$

$$\{\varphi_j\}_{j=0}^\infty, \{\psi_j\}_{j=0}^\infty \in \Phi(\mathbb{R}^n) \underset{\substack{\text{analog zu}\\ \text{Satz 10.3}}}{\Longrightarrow} \varphi_j\psi_{j-1},\ \varphi_j\psi_j,\ \varphi_j\psi_{j+1} \ \text{Fourier-Multiplikatoren in } L_p(\mathbb{R}^n) \tag{$**$}$$

$$\Longrightarrow \quad R_\psi \in \mathcal{L}\left(\ell^s_q(L_p(\mathbb{R}^n)), B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)\right)$$

[37] Sergei Mikhailovich Nikol'skij (* 30.4.1905)

[38] Seien $0 < q \le p \le \infty$, $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp} \mathcal{F}f \subset \{y \in \mathbb{R}^n : |y| < R\}$, $R > 0$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. Dann existieren $c_\alpha > 0$ und $c_{p,q} > 0$, so dass für alle $R > 0$ gilt : $\|D^\alpha f|L_p(\mathbb{R}^n)\| \le c_\alpha R^{|\alpha|} \|f|L_p(\mathbb{R}^n)\|$, $\|f|L_p(\mathbb{R}^n)\| \le c_{p,q} R^{n(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})} \|f|L_q(\mathbb{R}^n)\|$.

n.z.z. : $R_\psi \circ S_\varphi \;=\; \mathrm{id}_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)}$

$$\text{sei} \quad f \in B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) \;\Longrightarrow\; R_\psi\left(S_\varphi f\right) \;=\; R_\psi\Big(\underbrace{\big\{\overbrace{\mathcal{F}^{-1}\varphi_j\mathcal{F}f}^{=:h_j}\big\}_{j=0}^\infty}_{S_\varphi f\ ,\ (2)}\Big) \underset{(1)}{=} \sum_{j=0}^\infty \mathcal{F}^{-1}\psi_j\mathcal{F}\underbrace{\mathcal{F}^{-1}\varphi_j\mathcal{F}f}_{h_j}$$

$$= \sum_{j=0}^\infty \mathcal{F}^{-1}\underbrace{\overbrace{\psi_j}^{\equiv 1 \text{ auf supp } \varphi_j}\varphi_j}_{\equiv\varphi_j}\mathcal{F}f \;=\; \sum_{j=0}^\infty \mathcal{F}^{-1}\varphi_j\mathcal{F}f \underset{\substack{\{\varphi_j\}\in\Phi(\mathbb{R}^n)\\ \text{Def. 10.3 (iii)}}}{=} f$$

$$\Longrightarrow \quad R_\psi \circ S_\varphi \;=\; \mathrm{id}_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)}$$ □

Bemerkung nach Satz 10.3 : $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $s\in\mathbb{R}$, $0<p,q\le\infty$

$\Longrightarrow$ $\left\{B^{s_0}_{p_0,q_0}(\mathbb{R}^n),\ B^{s_1}_{p_1,q_1}(\mathbb{R}^n)\right\}$ Interpolationspaar von Banachräumen, $1\le p_i,q_i\le\infty$, $s_i\in\mathbb{R}$, $i=0,1$

$$\underset{\text{Lemma 1, Satz 8.2 (ii)}}{\Longrightarrow} \quad S_\varphi \;:\; \left(B^{s_0}_{p_0,q_0}(\mathbb{R}^n), B^{s_1}_{p_1,q_1}(\mathbb{R}^n)\right)_{\theta,q} \longrightarrow \left(\ell^{s_0}_{q_0}(L_{p_0}(\mathbb{R}^n)), \ell^{s_1}_{q_1}(L_{p_1}(\mathbb{R}^n))\right)_{\theta,q}$$

Isomorphismus auf abgeschlossenen Teilraum von $\left(\ell^{s_0}_{q_0}(L_{p_0}(\mathbb{R}^n)), \ell^{s_1}_{q_1}(L_{p_1}(\mathbb{R}^n))\right)_{\theta,q}$, $0<\theta<1$, $1\le q\le\infty$, d.h.

$$\begin{aligned}\left\| f \,\Big|\left(B^{s_0}_{p_0,q_0}(\mathbb{R}^n), B^{s_1}_{p_1,q_1}(\mathbb{R}^n)\right)_{\theta,q}\right\| &\sim \left\| Sf \,\Big|\left(\ell^{s_0}_{q_0}(L_{p_0}(\mathbb{R}^n)), \ell^{s_1}_{q_1}(L_{p_1}(\mathbb{R}^n))\right)_{\theta,q}\right\| \\ &\sim \left\| \left\{\mathcal{F}^{-1}\varphi_j\mathcal{F}f\right\}_{j=0}^\infty \Big|\left(\ell^{s_0}_{q_0}(L_{p_0}(\mathbb{R}^n)), \ell^{s_1}_{q_1}(L_{p_1}(\mathbb{R}^n))\right)_{\theta,q}\right\| \qquad (3)\end{aligned}$$

für alle $f \in \left(B^{s_0}_{p_0,q_0}(\mathbb{R}^n), B^{s_1}_{p_1,q_1}(\mathbb{R}^n)\right)_{\theta,q}$

Satz 1 *Seien* $1\le p\le\infty$, $1\le q_0,q_1,q\le\infty$, $s_0,s_1\in\mathbb{R}$ *mit* $s_0\ne s_1$ *und* $0<\theta<1$. *Dann gilt*

$$\left(B^{s_0}_{p,q_0}(\mathbb{R}^n),\ B^{s_1}_{p,q_1}(\mathbb{R}^n)\right)_{\theta,q} \;=\; B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) \qquad \textit{mit} \quad s=(1-\theta)s_0+\theta s_1\ .$$

B e w e i s : Satz 5.1 mit $A=L_p(\mathbb{R}^n)$ $\Longrightarrow$ $\left(\ell^{s_0}_{q_0}(L_p(\mathbb{R}^n)), \ell^{s_1}_{q_1}(L_p(\mathbb{R}^n))\right)_{\theta,q} \;=\; \ell^s_q(L_p(\mathbb{R}^n))$

$$\underset{(3)}{\Longrightarrow} \quad \left\| f \,\Big|\left(B^{s_0}_{p,q_0}(\mathbb{R}^n), B^{s_1}_{p,q_1}(\mathbb{R}^n)\right)_{\theta,q}\right\| \sim \left\|\left\{\mathcal{F}^{-1}\varphi_j\mathcal{F}f\right\}_{j=0}^\infty \big|\ell^s_q(L_p(\mathbb{R}^n))\right\| \sim \left\|f|B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)\right\|$$

mit isomorpher Zuordnung □

Satz 2 *Seien* $1\le p\le\infty$, $s\in\mathbb{R}$, $1\le q_0,q_1\le\infty$ *mit* $q_0\ne q_1$ *und* $0<\theta<1$. *Dann gilt*

$$\left(B^s_{p,q_0}(\mathbb{R}^n),\ B^s_{p,q_1}(\mathbb{R}^n)\right)_{\theta,q} \;=\; B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) \qquad \textit{mit} \quad \frac{1}{q}=\frac{1-\theta}{q_0}+\frac{\theta}{q_1}\ .$$

B e w e i s : Satz 5.2, Folg. 7.1, Bemerkung vor Def. 5.2 $\Longrightarrow$ $\left(\ell^s_{q_0}(A), \ell^s_{q_1}(A)\right)_{\theta,q} \;=\; \ell^s_q(A)$

$$\underset{A=L_p(\mathbb{R}^n),\ (3)}{\Longrightarrow} \quad \left\| f \,\Big|\left(B^s_{p,q_0}(\mathbb{R}^n), B^s_{p,q_1}(\mathbb{R}^n)\right)_{\theta,q}\right\| \sim \left\|f|B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)\right\| \quad \text{mit isomorpher Zuordnung}$$ □

Bemerkung : Seien $0 < \theta < 1$, $1 < p_0, p_1 < \infty$ mit $p_0 \neq p_1$, $s_0, s_1 \in \mathbb{R}$, $1 \leq q_0, q_1 \leq \infty$ mit $\dfrac{1-\theta}{q_0} + \dfrac{\theta}{q_1} = \dfrac{1-\theta}{p_0} + \dfrac{\theta}{p_1}$. Dann gilt

$$\Big(B^{s_0}_{p_0,q_0}(\mathbb{R}^n),\ B^{s_1}_{p_1,q_1}(\mathbb{R}^n)\Big)_{\theta,p} \ = \ B^s_{p,p}(\mathbb{R}^n)$$

für $s := (1-\theta)s_0 + \theta s_1$ und $\dfrac{1}{p} := \dfrac{1-\theta}{p_0} + \dfrac{\theta}{p_1} = \dfrac{1-\theta}{q_0} + \dfrac{\theta}{q_1}$ ([Tri78, Thm. 2.4.1 (c)]).

Satz 3 *Seien* $1 < p < \infty$, $s_0, s_1 \in \mathbb{R}$, $s_0 \neq s_1$, $1 \leq q \leq \infty$, *und* $0 < \theta < 1$. *Dann gilt*

$$\Big(H^{s_0}_p(\mathbb{R}^n),\ H^{s_1}_p(\mathbb{R}^n)\Big)_{\theta,q} \ = \ B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n), \qquad \textit{mit} \quad s = (1-\theta)s_0 + \theta s_1,$$

insbesondere

$$\Big(L_p(\mathbb{R}^n),\ H^s_p(\mathbb{R}^n)\Big)_{\theta,q} \ = \ B^{\theta s}_{p,q}(\mathbb{R}^n), \quad s > 0,$$

und

$$\Big(L_p(\mathbb{R}^n),\ W^k_p(\mathbb{R}^n)\Big)_{\theta,q} \ = \ B^{\theta k}_{p,q}(\mathbb{R}^n), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Beweis :

$$B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) \underset{\text{Satz 1}}{=} \Big(B^{s_0}_{p,1}(\mathbb{R}^n),\ B^{s_1}_{p,1}(\mathbb{R}^n)\Big)_{\theta,q} \underset{\substack{\text{Lemma 4.2}\\ \text{Satz 10.4 (i)}}}{\hookrightarrow} \Big(H^{s_0}_p(\mathbb{R}^n),\ H^{s_1}_p(\mathbb{R}^n)\Big)_{\theta,q}$$

$$\underset{\substack{\text{Lemma 4.2}\\ \text{Satz 10.4 (i)}}}{\hookrightarrow} \Big(B^{s_0}_{p,\infty}(\mathbb{R}^n),\ B^{s_1}_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)\Big)_{\theta,q} \underset{\text{Satz 1}}{=} B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$$

$L_p(\mathbb{R}^n) \underset{\text{Def. 10.1}}{=} H^0_p(\mathbb{R}^n)$, $\quad W^k_p(\mathbb{R}^n) \underset{\text{Satz 10.2}}{=} H^k_p(\mathbb{R}^n)$, $k \in \mathbb{N}$ $\Longrightarrow$ Spezialfälle $\square$

Symbols

Index

Literatur

[BK91] Yu.A. Brudnyi and N.Ya. Krugljak. *Interpolation functors and interpolation spaces. Vol. 1*. North-Holland, Amsterdam, 1991.

[BL76] J. Bergh and J. Löfström. *Interpolation spaces*. Springer, Berlin, 1976.

[BS88] C. Bennett and R. Sharpley. *Interpolation of operators*. Academic Press, Boston, 1988.

[CEP90] F. Cobos, D.E. Edmunds, and A.J.B. Potter. Real interpolation and compact linear operators. *J. Funct. Anal.*, 88(2):351–365, 1990.

[Cwi92] M. Cwikel. Real and complex interpolation and extrapolation of compact operators. *Duke Math. J.*, 65(2):333–343, 1992.

[ET96] D.E. Edmunds and H. Triebel. *Function spaces, entropy numbers, differential operators*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1996.

[Hay69] K. Hayakawa. Interpolation by the real method preserves compactness of operators. *J. Math. Soc. Japan*, 21:189–199, 1969.

[HLP52] G.H. Hardy, J.E. Littlewood, and G. Pólya. *Inequalities*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2nd edition, 1952.

[HT94] D. Haroske and H. Triebel. Entropy numbers in weighted function spaces and eigenvalue distribution of some degenerate pseudodifferential operators I. *Math. Nachr.*, 167:131–156, 1994.

[KPS82] S.G. Kreĭn, Yu.I. Petunīn, and E.M. Semënov. *Interpolation of linear operators*, volume 54 of *Translations of Mathematical Monographs*. AMS, Providence, R.I., 1982. Translated from the Russian.

[Kra60] M.A. Krasnosel'skij. On a theorem of M. Riesz. *Sov. Math., Dokl.*, 1:229–231, 1960. translation from Dokl. Akad. Nauk SSSR 131, 246-248 (1960).

[LP64] J.L. Lions and J. Peetre. Sur une classe d'espaces d'interpolation. *Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci.*, 19:5–68, 1964.

[MS76] B.S. Mityagin and E.M. Semenov. C^k is not an interpolation space between C and C^n, $0 < k < n$. *Sov. Math., Dokl.*, 17:778–782, 1976. translation from Dokl. Akad. Nauk SSSR 228, 543-546 (1976).

[Pee68] J. Peetre. ε-entropie, ε-capacité et espaces d'interpolation. *Ricerche Mat.*, 17:216–220, 1968.

[Per64] A. Persson. Compact linear mappings between interpolation spaces. *Ark. Mat.*, 5:215–219, 1964.

[Pie78] A. Pietsch. *Operator ideals*, volume 16 of *Mathematical Monographs*. Dt. Verlag Wiss., Berlin, 1978.

[Tri73] H. Triebel. Spaces of distributions of Besov type on Euclidean n-space. Duality, interpolation. *Ark. Mat.*, 11(1):13–64, 1973.

[Tri78] H. Triebel. *Interpolation theory, function spaces, differential operators*. North-Holland, Amsterdam, 1978.

[Tri83] H. Triebel. *Theory of function spaces*. Birkhäuser, Basel, 1983.

[Tri92a] H. Triebel. *Higher analysis*. J.A. Barth, Leipzig, 1992. Translated from the German; Hochschulbücher für Mathematik, Bd. 76, Dt. Verlag Wiss., Berlin, 1972.

[Tri92b] H. Triebel. *Theory of function spaces II*. Birkhäuser, Basel, 1992.