Philipps-Universität Marburg **Sommersemester 2017**
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. T. Surowiec, A. Kröck, A. Sieber

Übungen zur Nichtlinearen Optimierung
10. Aufgabenblatt

Aufgabe 1 (Optimalität bei restringierten Problemen) (5)

Für die Minimierung einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion f unter den linearen Nebenbedingungen $Ax = b$ gilt das Folgende:
Sei x^* ein zulässiger Punkt. Sei weiter $Z \in \mathbb{R}^{n\times r}$ eine Nullraummatrix zu A, die keine Basis ist, d.h., dass einige der Spalten von Z linear abhängig sind (und $r > n - m$). Dann gilt: Ist

$$Z^T \nabla f(x^*) = 0 \text{ und } p^T \nabla^2 f(x^*) p > 0 \quad \forall p \in \mathcal{N}(A) \setminus \{0\},$$

so ist x^* ein strikt lokaler Minimierer von f über der Menge $Ax = b$.

Hinweis: Sie sollen diese Aussage anwenden, jedoch nicht beweisen.

(i) Betrachten Sie das Problem

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) = x_1^2 + x_2^2 \\ \text{s.t.} & x_1 + x_2 = 2. \end{array}$$

Sei

$$Z = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

eine Nullraummatrix der zulässigen Menge. Zeigen Sie, dass der Punkt $x^* = (1,1)^T$ die notwendige Bedingung erster Ordnung erfüllt. Zeigen Sie, dass die Matrix $Z^T \nabla^2 f(x^*) Z$ jedoch nicht positiv definit ist.

(ii) Zeigen Sie, dass der Punkt $x^* = (1,1)^T$ ein strikt lokaler Minimierer des Problems in (i) ist.

Aufgabe 2 (Restringierte Optimierung) (10)

Betrachten Sie das Problem

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) = 3x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2 - \frac{1}{2}x_3^2 + x_1x_2 - x_1x_3 + 2x_2x_3 \\ \text{s.t.} & 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \end{array}$$

(i) Finden Sie einen lokalen Minimierer dieses Problems.

(ii) Verwenden Sie die Lagrange-Multiplikatoren, um den minimalen Wert der Zielfunktion f unter der gestörten Nebenbedingung $2x_1 - x_2 + x_3 = 2 + \delta$ zu schätzen.

bitte wenden!

(iii) Vergleichen Sie Ihre Schätzung mit dem tatsächlichen Minimum für $\delta = 0.25$.

Aufgabe 3 (Restringierte Optimierung) (10)

Finden Sie einen lokalen Minimierer für das Problem

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) = -x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2 \\ \text{s.t.} & \begin{array}{rcl} 2x_1 - x_2 & \geq & 2 \\ x_1 + x_2 & \leq & 4 \\ x_1 & \geq & 0. \end{array} \end{array}$$

Aufgabe 4 (Optimalität bei restringierten Problemen) (15)

Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) $\exists$ ein Punkt (x^*, λ^*) mit $Ax^* \geq b, \quad \lambda^* \geq 0, \quad \lambda^{*T}(Ax^* - b) = 0,$

(ii) $\exists$ ein Punkt (x^*, λ^*) mit $a_i^T x^* \geq b_i, \quad \lambda_i^* \geq 0, \quad \lambda_i^*(a_i^T x^* - b_i) = 0 \quad \forall\, i = 1, \ldots, m,$

(iii) $\exists$ ein Punkt (x^*, λ^*) mit $\lambda_i^* = \max(0, \lambda_i^* + b_i - a_i^T x^*) \quad \forall\, i = 1, \ldots, m.$

Abgabe: Dienstag, 11. Juli 2017, vor der Vorlesung.