Philipps-Universität Marburg **Sommersemester 2017**
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. T. Surowiec, A. Kröck, A. Sieber

Übungen zur Nichtlinearen Optimierung
2. Aufgabenblatt

Aufgabe 1 (Konvergenz des Newton-Verfahrens) (10)

Beweisen Sie den folgenden Satz der Vorlesung:
Sei $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $x_* \in \mathbb{R}$ mit $f(x_*) = 0$ und $f'(x^*) \neq 0$. Ist $|x_0 - x_*|$ hinreichend klein, so konvergiert die Folge $x_{k+1} = x_k - f(x_k)(f'(x_k))^{-1}$ q-quadratisch gegen x_* mit Konvergenzrate $C = \left|\frac{f''(x_*)}{2f'(x_*)}\right|$.

(i) Zeigen Sie zunächst, dass die Folge $\{x_k\}$ wohl-definiert ist, d.h. die Iteration erzeugt eine unendliche Folge. Zeigen Sie dazu, dass unter bestimmten Annahmen (welchen?) an die Ableitung f' ein $\eta > 0$ existiert, so dass aus $|x_0 - x_*| < \eta$ die Konvergenz $x_k \to x_*$ folgt.

(ii) Zeigen Sie dann mithilfe des Satzes von Taylor die q-quadratische Konvergenz.
Hinweis: Es ist $|x_{n+1} - x_n| = \left|\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right| = \left|\frac{f(x_n)-f(x_*)}{x_n - x_*}\right| \left|\frac{1}{f'(x_n)}\right| |x_n - x_*|$.

Aufgabe 2 (Newton-Verfahren) (10)

(i) Bestimmen Sie mithilfe des Newton-Verfahrens die drei Lösungen der Gleichung

$$x^3 - 5x^2 - 12x + 19 = 0.$$

(ii) Wenden Sie das Newton-Verfahren auf die Funktion $f(x) = (x-2)^4 + (x-2)^5$ mit dem Startpunkt $x_0 = 3$ an. Zeigen Sie die lineare Konvergenz der Folge $\{x_k\}$ mit Konvergenzrate $C = \frac{3}{4}$.

(iii) Wenden Sie den modifizierten Newton-Schritt

$$x_{k+1} = x_k - 4\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

auf die Funktion f aus dem vorherigen Aufgabenteil an. Zeigen Sie die quadratische Konvergenz dieser Methode und bestimmen Sie die zugehörige Konvergenzrate.

bitte wenden!

Aufgabe 3 (Optimalität) (10)

(i) Bestimmen Sie die Minimierer bzw. Maximierer der Funktionen

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= x_1^4 + x_2^4 - 4x_1x_2, \\ g(x_1, x_2, x_3) &= x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_2x_3 - 2x_3. \end{aligned}$$

(ii) Bestimmen Sie alle Werte des Parameters α, für die der Punkt $(1, 0)^T$ der Minimierer bzw. Maximierer der Funktion

$$h(x_1, x_2) = \alpha^3 x_1 e^{x_2} + 2\alpha^2 \ln(x_1 + x_2) - (\alpha + 2)x_1 + 8\alpha x_2 + 16x_1x_2.$$

Aufgabe 4 (Optimalitätsbedingung) (10)

Betrachten Sie das Minimierungsproblem

$$\min \quad \frac{1}{2}\|Ax - b\|_2^2$$

mit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$.

(i) Sei $m \geq n$ und $\operatorname{rank}(A) = n$. Geben Sie die notwendige Optimalitätsbedingung erster Ordnung an. Ist diese auch hinreichend? Geben Sie außerdem eine explizite Darstellung der optimalen Lösung an.

(ii) Sei nun $m < n$ und $\operatorname{rank}(A) = m$. Geben Sie eine explizite Darstellung aller Lösungen dieses Minimierungsproblems sowie für diejenige Lösung mit der kleinsten Norm an.

Abgabe: Dienstag, 9. Mai 2017, vor der Vorlesung.