Philipps-Universität Marburg **Sommersemester 2017**
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. T. Surowiec, A. Kröck, A. Sieber

Übungen zur Nichtlinearen Optimierung
3. Aufgabenblatt

Aufgabe 1 (Newton-Verfahren) (10)

Verwenden Sie das Newton-Verfahren, um das Problem

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad f(x) = 5x^5 + 2x^3 - 4x^2 + 2$$

zu lösen. Suchen Sie auf dem Intervall $[-2, 2]$ nach einer Lösung. Stellen Sie sicher, dass es sich bei Ihrer Lösung tatsächlich um ein Minimum und nicht um ein Maximum handelt.

Aufgabe 2 (Newton-Verfahren) (10)

(i) Betrachten Sie das Newton-Verfahren zur Lösung des Problems

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad g(x) = |x|^q$$

mit $q > 2$ und Startwert $x_0 > 0$ zur Bestimmung des globalen Minimums $x^* = 0$. Zeigen Sie, dass das Newton-Verfahren linear gegen x^* konvergiert und bestimmen Sie die Konvergenzrate. Zeigen Sie, dass die Konvergenz nicht superlinear ist.
Hinweis: Es ist $|x| = x \cdot \operatorname{sign}(x)$.

(ii) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regulär und $c \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass das Newton-Verfahren zur Minimierung von $f(x)$ im folgenden Sinne invariant gegenüber affin-linearen Transformationen der Form $Ay + c = x$, also $y = A^{-1}(x - c)$ ist: Das Newton-Verfahren erzeugt bei Anwendung auf die Funktion $h(y) := f(Ay + c)$ mit einem Startpunkt $y_0 = A^{-1}(x_0 - c)$ die Punkte $y_k = A^{-1}(x_k - c)$, wobei x_k die Iterierten des Newton-Verfahrens bei Anwendung auf die Funktion $f(x)$ mit Startpunkt x_0 sind.

Aufgabe 3 (Beweis von Theorem 3.8) (10)

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und die Hesse-Matrix $\nabla^2 f(\bar{x})$ nicht-singulär für einen Punkt $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$.
Zeigen Sie, dass Konstanten $\epsilon > 0$ und $\beta > \alpha > 0$ existieren, sodass

$$\alpha \|x - \bar{x}\| \leq \|\nabla f(x) - \nabla f(\bar{x})\| \leq \beta \|x - \bar{x}\|$$

für alle $\|x - \bar{x}\| \leq \epsilon$ gilt.

bitte wenden!

Aufgabe 4 (Lösbarkeit von Minimierungsproblemen) (10)

Treffen Sie die folgenden Annahmen, um die Lösbarkeit des unrestringierten Minimierungsproblems

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad f(x)$$

zu zeigen.

1. Zu $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ existiert eine Funktion $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ mit $[y_k \to \infty \Rightarrow \psi(y_k) \to \infty]$, sodass $f(x) \geq \psi(\|x\|)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt.
2. Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und für alle $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ mit $x_k \to x$ gilt: $\liminf\limits_{k \to \infty} f(x_k) \geq f(x)$.
3. Es existiert ein $x_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $f(x_0) < \infty$. Außerdem gelte $f(x) > -\infty$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

Sei $\mathcal{S} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq f(x_0)\}$.

(i) Zeigen Sie, dass $\inf\limits_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) = \inf\limits_{x \in \mathcal{S}} f(x)$ (sofern existent).

(ii) Zeigen Sie, dass $\mathcal{S}$ nicht-leer, abgeschlossen und beschränkt ist.

(iii) Zeigen Sie, dass ein $\bar{x} \in \mathcal{S}$ existiert, sodass $f(\bar{x}) = \inf\limits_{x \in \mathcal{S}} f(x)$ gilt.
Hinweis: Aus Teil (i) folgt die Existenz einer Folge $\{x_k\} \subset \mathcal{S}$ mit $\lim\limits_{k \to \infty} f(x_k) = \inf\limits_{x \in \mathcal{S}} f(x)$, wobei $\{x_k\}$ zunächst nicht konvergent ist.

(iv) Zeigen Sie abschließend: Ist die Funktion f **strikt** konvex, so ist die Lösung $\bar{x}$ eindeutig bestimmt.

Abgabe: Dienstag, 16. Mai 2017, vor der Vorlesung.