Übungen zur NICHTLINEAREN OPTIMIERUNG

4. Aufgabenblatt

Aufgabe 1 (Lokale Minimierer/Maximierer) (10)

Bestimmen Sie die stationären Punkte der folgenden Funktionen und entscheiden Sie, ob es sich dabei jeweils um einen lokalen Minimierer oder Maximierer handelt.

(i) $f_a(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

(ii) $f_b(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 - 2x_2$

(iii) $f_c(x) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$

(iv) $f_d(x) = (x_1 + x_2)^4 + x_2^2$

(v) $f_e(x) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 + \eta(x_1^2 + x_2^2 - 0.25)^2$ mit $\eta = 1$

Aufgabe 2 (Newton-Verfahren mit Liniensuche) (10)

Zeigen Sie: Wenn das Newton-Verfahren mit exakter Liniensuche konvergiert, dann ist die Konvergenzordnung quadratisch.

Nehmen Sie dazu an, dass das Newton-Verfahren zur Minimierung der Funktion $f(x)$ mit exakter Liniensuche in jeder Iteration verwendet wird. Nehmen Sie weiter an, dass das klassische Newton-Verfahren (d.h. ohne Liniensuche) quadratisch gegen x^* konvergiert, und dass die Funktion $\nabla^2 f(x)$ Lipschitz-stetig auf $\mathbb{R}^n$ ist.

(i) Sei α_k die Schrittweite der exakten Liniensuche. Zeigen Sie: Für hinreichend großes k gilt

$$\alpha_k = 1 + \mathcal{O}(\|\nabla f(x_k)\|).$$

Hinweis: Sei $F(\alpha) = f(x_k + \alpha p_k)$ und entwickeln Sie die Bedingung $F'(\alpha) = 0$ in eine Taylor-Reihe.

(ii) Zeigen Sie, dass $\|x_{k+1} - x^*\| = \mathcal{O}(\|\nabla f(x_k)\|^2) + \mathcal{O}(\|x_k - x^*\|^2)$.

(iii) Zeigen Sie, dass $\|x_{k+1} - x^*\| = \mathcal{O}(\|x_k - x^*\|^2)$.

bitte wenden!

Aufgabe 3 (Konvergenzaussage für Liniensuche mit Wolfe-Bedingung) (15)

Nehmen Sie an, dass es einen Algorithmus zur Berechnung der Schrittweite α_k gibt, für den

$$\begin{aligned} f(x_k + \alpha_k p_k) &\leq f(x_k) + \mu \alpha_k p_k^T \nabla f(x_k) \\ p_k^T \nabla f(x_k + \alpha_k p_k) &\geq \eta p_k^T \nabla f(x_k), \end{aligned}$$

mit $0 < \mu < \eta < 1$ gilt. Dies bezeichnet man auch als *schwache Wolfe-Bedingung*.

Nehmen Sie weiter an, dass die Suchrichtung die Abstiegsbedingung

$$-\frac{p_k^T \nabla f(x_k)}{\|p_k\| \cdot \|\nabla f(x_k)\|} \geq \varepsilon > 0$$

erfüllt.

Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und der Startpunkt x_0 gegeben. Angenommen, die Menge $\mathcal{S} = \{x \mid f(x) \leq f(x_0)\}$ ist beschränkt und ∇f ist Lipschitz-stetig auf $\mathcal{S}$, d.h. es gibt eine Konstante $L > 0$, so dass $\|\nabla f(x) - \nabla f(\bar{x})\| \leq L\|x - \bar{x}\|$ für alle $x, \bar{x} \in \mathcal{S}$.

(i) Zeigen Sie, dass

$$(\eta - 1)p_k^T \nabla f(x_k) \leq p_k^T [\nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k)] \leq \alpha_k L \|p_k\|^2.$$

(ii) Zeigen Sie, dass

$$f(x_{k+1}) \leq f(x_k) - c \cos^2(\theta_k) \|\nabla f(x_k)\|^2,$$

wobei $c = \mu(1 - \eta)/L$ und θ_k der Winkel zwischen p_k und $-\nabla f(x_k)$ ist.

(iii) Zeigen Sie, dass

$$\sum_{k=0}^{\infty} \cos^2(\theta_k) \|\nabla f(x_k)\|^2 < \infty.$$

(iv) Zeigen Sie, dass

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\nabla f(x_k)\| = 0.$$

Aufgabe 4 (Bonusaufgabe: Programmieraufgabe) (30*)

Schreiben Sie ein Programm zur Minimierung einer multivariaten Funktion mit Hilfe des modifizierten Newton-Verfahrens.

Falls in der Cholesky-Zerlegung der Hesse-Matrix die Diagonaleinträge $d_{i,i} \leq 0$ sind, ersetzen Sie diese durch $\tilde{d}_{i,i} = \max\{|d_{i,i}|, 10^{-2}\}$.

(i) Verwenden Sie zur Liniensuche (a) die Backtracking-Strategie und (b) die Wolfe-Bedingung mit Interpolation.

(ii) Akzeptieren Sie x als Lösung, falls $(1 + |f(x)|)^{-1} \|\nabla f(x)\| \leq \varepsilon = 10^{-8}$ gilt, oder die Anzahl der Iteration ITMAX = 1000 überschreitet.

- (iii) Geben Sie den Startpunkt x_0 aus. Geben Sie außerdem in jeder Iteration die Suchrichtung p , die Schrittweite α und die neue Näherung der Lösung x_{k+1} aus. Sollten sehr viele Iteration nötig sein, geben Sie lediglich die Ergebnisse der ersten zehn sowie der letzten fünf Iterationen aus. Geben Sie einen Hinweis aus, sofern nach ITMAX Iterationen keine Lösung gefunden wurde.
- (iv) Testen Sie ihr Programm anhand der Funktionen aus Aufgabe 1. Verwenden Sie für die Funktion f_e die Parameter $\eta \in \{1, 10, 100\}$. Für diese Funktion wird die Konditionszahl der Hesse-Matrix in der Lösung mit wachsendem Parameter η größer. Beschreiben Sie, wie dies die Performance des Algorithmus beeinflusst. Verwenden Sie die folgenden Startpunkte:

$$\begin{aligned}
 x_0 &= (1, 1, 1)^T && \text{für } f_a \\
 x_0 &= (0, 0)^T && \text{für } f_b \\
 x_0 &= (-1.2, 1)^T && \text{für } f_c \\
 x_0 &= (2, -2)^T && \text{für } f_d \\
 x_0 &= (1, -1)^T && \text{für } f_e
 \end{aligned}$$

- (v) Sind Ihre Ergebnisse konsistent mit der Theorie des Newton-Verfahrens?

Hinweise: Versehen Sie Ihr Programm mit sinnvollen Kommentaren. Programme, die nicht kompilieren, erhalten keine Punkte.

Abgabe: Dienstag, 30. Mai 2017, vor der Vorlesung. Abgabe der Programmieraufgabe per Email an kroECKa@mathematik.uni-marburg.de